

संख्यात्मक योग्यता

(For SSC, Bank, Railway, Police, State PSC, MBA, NDA, CDS & Other Competition Exam)

- ✓ तीव्र गणनाओं के नियम
- ✓ संख्या पद्धति
- ✓ भिन्न
- ✓ वर्ग-वर्गमूल व घन-घनमूल
- ✓ घातांक व करणी
- ✓ ल०स० व म०स०
- ✓ सरलीकरण
- ✓ लघुगणक
- ✓ अनुपात समानुपात
- ✓ औसत
- ✓ प्रतिशतता
- ✓ साधारण ब्याज
- ✓ चक्रवृद्धि ब्याज
- ✓ मिश्रण
- ✓ साझा
- ✓ कैलेंडर
- ✓ लाभ-हानि
- ✓ बट्टा
- ✓ कार्य और समय
- ✓ पाइप व टंकी
- ✓ दूरी, समय व चाल
- ✓ रेलगाड़ी
- ✓ नदी-नाव
- ✓ क्षेत्रमिति
- ✓ आयतन
- ✓ ज्यामिति
- ✓ त्रिकोणमिति
- ✓ निर्देशांक ज्यामिति
- ✓ क्रमचय व संचय
- ✓ प्रायिकता
- ✓ समीकरण व असमीकरण
- ✓ डाटा विश्लेषण

**E-Book
100% Free**

'अंकित शर्मा'

34+ अध्याय
कंसेप्ट विविध प्रश्नों
के हल के साथ



संख्यात्मक योग्यता

(बैंक, एसएससी, रेलवे, पुलिस आदि प्रतियोगी परीक्षाओं के लिए उपयोगी पुस्तक)

लेखक : अंकित शर्मा

संपर्क सूत्र : www.nextexampoint.wordpress.com

Youtube : NEXT EXAM POINT

Gmail Id : nextexampoint@gmail.com

प्रस्तावना

प्रिय पाठको,

प्रस्तुत पुस्तक 'संख्यात्मक योग्यता' विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में आये गणित के प्रश्नों के सूक्ष्म विवेचन-विश्लेषण के आधार पर तैयार की गयी है। इस पुस्तक के प्रत्येक अध्याय दो भागों में विभक्त है — 1. कंसेप्ट व सूत्र 2. हल सहित विभिन्न टाइप के प्रश्न इस पुस्तक में तथ्यों व प्रश्नों का संकलन इस तरह से किया गया है कि परीक्षार्थियों को एक ही स्थान पर सारी संबद्ध चीजें मिल जाएँ तथा पुस्तक को संक्षिप्त व एकसमान प्रश्नों का बार-बार उल्लेख नहीं किया गया जिससे परीक्षार्थियों को परीक्षा के समय रीविज़न करने में कम समय लगे और कोई तथ्य न छूटे। इस पुस्तक में विभिन्न प्रकार के सवाल विभिन्न परीक्षाओं (SSC, Railway, Bank, State Exam Etc) से लिये गये और तथ्यों व कंसेप्ट NCERT, UP BOARD के पैटर्न पर हैं। मेरा विश्वास है कि यह पुस्तक परीक्षार्थियों के लिए मागदर्शक का काम करेगी।

मैं अंकित शर्मा अपने गुरुजनों व मित्रों का हृदय से आभार प्रकट करता हूँ, जिनकी अथक मेहनत से मैं इस योग्य बना। इनमें साहिल, स्व० संजीव राजपूत व प्रिय मित्र राघवेन्द्र (गोरखपुर) प्रमुख हैं। मैंने इस पुस्तक को त्रुटिहीन बनाने का प्रयास किया है फिर भी कोई त्रुटि हो तो मैं उन विद्वानों, शिक्षकों, छात्रों आदि का विशेष आभारी रहूँगा जो इस पुस्तक के संबंध में अपने सुझावों से मुझे अवगत करायेंगे।

प्रथम संस्करण

4 अप्रैल, 2020

अंकित शर्मा

(एटा, उत्तरप्रदेश)

सवालों का हल देखने के लिए Youtube Channel →

NEXT EXAM POINT

फ्री स्टडी मटेरियल के लिए →

www.nextexampoint.wordpress.com

www.nextexampoint@gmail.com

(किसी भी त्रुटि या क्षति के लिए लेखक जिम्मेदार नहीं है, आपके सुझाव सादर आमंत्रित हैं।)

अनुक्रमणिका

क्रमांक	अध्याय	पृष्ठ क्र०	क्रमांक	अध्याय	पृष्ठ क्र०
1	तीव्र गणनाओं के नियम	5 से 8	18	पाइप व टंकी	82 – 83
2	संख्या पद्धति	9 से 22	19	दूरी - चाल व समय	84 – 85
3	भिन्न	23 से 27	20	रेलगाड़ी	86 – 87
4	ल०स० व म०स०	28 से 31	21	नदी नाव	88 – 89
5	वर्ग-वर्गमूल व घन-घनमूल	32 से 35	22	क्षेत्रमिति (2D)	90 – 99
6	घातांक करणी व लघुगणक	36 से 39	23	क्षेत्रमिति व आयतन (3D)	100 – 104
7	सरलीकरण	40 से 41	24	ज्यामिति	105 – 115
8	अनुपात व समानुपात	42 से 46	25	त्रिकोणमिति	116 – 120
9	प्रतिशतता	47 से 54	26	ऊँचाई व दूरी	121 – 122
10	साधारण ब्याज	55 से 58	27	निर्देशांक ज्यामिति	123 – 126
11	चक्रवृद्धि ब्याज	59 से 63	28	क्रमचय व संचय	127 – 130
12	औसत	64 से 66	29	प्रायिकता	131 – 134
13	साझा	67 से 68	30	समीकरण व असमीकरण	135 – 137
14	मिश्रण	69 से 71	31	केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप	138 – 140
15	लाभ और हानि	72 से 76	32	कैलेण्डर	141 – 142
16	बट्टा	77 से 78	33	बीजगणित	143 – 144
17	कार्य और समय	79 - 81	34	डाटा विश्लेषण	145 – 148

1. Table 11 to 20

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
33	36	39	42	45	48	54	54	57	60
44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

2. Some Important Power value:

$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$
$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
$3^6 = 729$	$3^7 = 2187$	$3^8 = 6561$	$3^9 = 19683$
$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 4096$
$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	$5^5 = 3125$
$6^2 = 36$	$6^3 = 216$	$6^4 = 1296$	$6^5 = 7776$

$7^2 = 49$	$7^3 = 343$	$7^4 = 2401$	$7^5 = 16807$
$8^2 = 64$	$8^3 = 512$	$8^4 = 4096$	$8^5 = 32768$
$9^2 = 81$	$9^3 = 729$	$9^4 = 6561$	$9^5 = 59049$
$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$	$10^5 = 100000$

3. Important Square Root :

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{2} = 1.414..$	$\sqrt{3} = 1.732..$
$\sqrt{5} = 2.236..$	$\sqrt{6} = 2.449$	$\sqrt{7} = 2.828$
$\sqrt{10} = 3.162$	$\sqrt{11} = 3.317$	$\sqrt{12} = 3.464$
$\sqrt{13} = 3.606$	$\sqrt{14} = 3.714$	$\sqrt{15} = 3.873$

4. Decimal Number Square Root :

$\sqrt{.1} = 0.32$	$\sqrt{.2} = 0.45$	$\sqrt{.3} = 0.55$
$\sqrt{.4} = 0.63$	$\sqrt{.5} = 0.71$	$\sqrt{.6} = 0.77$
$\sqrt{.7} = 0.84$	$\sqrt{.8} = 0.89$	$\sqrt{.9} = 0.95$

योगफल ज्ञात करने के नियम-

पहले हम संख्याओं को इकाई, दहाई, सैंकडा के अंको के क्रम के हिसाब से जोड़ते थे। जिससे समय अधिक लगता है, लेकिन इसके विपरीत हम अब यदि इसके विपरीत संख्याओं को इकट्ठा जोड़े तो समय की बचत होगी। जैसे- 345 + 455 + 901 + 123 को इस प्रकार मन में गणना करें 345 व 455 होते 800 और 901 व 123 हुए 1024 फिर 1024 व 800 हुए 1824 कुल योग प्राप्त हुआ। इसी प्रकार से निम्न संख्याओं को जोड़िये

- i) 546+440+794+115
ii) 890+342+456+858

क्रमागत संख्याओं को जोड़ना -

यदि संख्यायें किसी श्रेणी में क्रम से बढ़ती है, तो इनको इस प्रकार से जोड़िये-

$$\text{योग} = \frac{\text{कुल संख्यायें (n)}}{2} \times [\text{पहली संख्या (f)} + \text{दूसरी संख्या (l)}]$$

जहाँ $n = \left(\frac{\text{अंतिम पद l} - \text{प्रथम पद f}}{\text{दो क्रमागत पदों का अंतर d}} \right) + 1$

- i) 1 + 2 + 3 + 50 श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए ?

$$n=50 \quad f=1 \quad l=50$$

$$\text{Sum} = \frac{50}{2} \times (1+50) = 25 \times 51 = \mathbf{1275}$$

- ii) 6 + 10 + 14 + 18 + 46 श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए

$$f=6 \quad l=46 \quad n = \left(\frac{46-6}{4} \right) + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$\text{Sum} = \frac{11}{2} \times (6+46) = \frac{11}{2} \times 52 = 11 \times 26 = \mathbf{286}$$

- iii) 12 + 4 + 6 + 8 + 20 श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए ?

$$f=2 \quad l=20 \quad n = \left(\frac{20-2}{2} \right) + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$\text{Sum} = \frac{10}{2} \times (2+20) = 5 \times 22 = \mathbf{110}$$

- iv) प्रथम 10 विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ?

$$f=1 \quad l=19 \quad n=10$$

$$\text{Sum} = \frac{10}{2} \times (1+19) = 5 \times 20 = \mathbf{100}$$

- v) लगातार 30 तक सम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए ?

$$f=2 \quad l=30 \quad n=15$$

$$\text{Sum} = \frac{15}{2} \times (2+30) = \frac{15}{2} \times 32 = 15 \times 16 = \mathbf{240}$$

क्रमागत संख्याओं के वर्गों का योगफल -

प्रारंभ से n तक या (1² + 2² + 3² + n²) या n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$\text{Sum}_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

जैसे- 1. प्रथम 20 प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल बताइये-

$$n=20 \text{ then } \text{Sum}_n^2 = \frac{20(20+1)(40+1)}{6}$$

$$= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 10 \times 7 \times 41 = \mathbf{2870}$$

लगातार n तक सम/विषम संख्याओं के वर्गों का योग

$$\text{Sum}_{\text{सम/विषम}}^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

जैसे- 1. लगातार 20 तक सम संख्याओं के वर्गों का योग या $2^2 + 4^2 + \dots + 20^2$ श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए-

$$\begin{aligned} n=20 \text{ then } \text{Sum}_{\text{सम/विषम}}^2 &= \frac{20(20+1)(20+2)}{6} \\ &= \frac{20 \times 21 \times 22}{6} = 10 \times 7 \times 22 = \mathbf{1540 \text{ उत्तर}} \end{aligned}$$

2. प्रथम 10 विषम संख्याओं के वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए ?

अंतिम संख्या n=19 तब

$$\begin{aligned} \text{Sum}_{\text{सम/विषम}}^2 &= \frac{19(19+1)(19+2)}{6} = \frac{19 \times 20 \times 21}{6} \\ &= 19 \times 10 \times 7 = \mathbf{1330 \text{ उत्तर}} \end{aligned}$$

लगातार n तक प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग

$$\text{Sum}_n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

जैसे- 1. प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग ज्ञात कीजिए ?

$$\text{Sum}_n^3 = \left[\frac{10(10+1)}{2} \right]^2 = (5 \times 11)^2 = \mathbf{3025 \text{ उत्तर}}$$

अन्तर या घटाने के नियम-

जब एक से अधिक संख्याओं में कुछ संख्याये धनात्मक व कुछ ऋणात्मक हो तो आप परस्पर संख्याओं को घटा कर छोटी संख्याओं को प्राप्त कर लें। जैसे-

a) $1345 + 7890 - 2300 - 4325 + 1728$

हल: $1345 + 5590 - 2597 = 1395 + 2998 = 4393$

a) $(133^2 - 122^2)$ हल कीजिए-

हल: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ से
 $133^2 - 122^2 = 11 \times 255 = 2805$

b) $144^2 + 44^2 - 12672$ को सरल कीजिए।

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \text{ से} \\ \Rightarrow (144 - 44)^2 &= 100^2 = \mathbf{10000} \end{aligned}$$

गुणा करने के नियम- दो अंको की संख्याओं का गुणा मन में ही गणना कर के कीजिए, न की लिखकर कीजिए व गुणा करते हुए उसका गुणनफल लिखते जाए। पहाड़े कम से कम 25 तक याद कर लीजिए इसे आपके गुणा करने के समय में बचत होगी।

दो अंको संख्याओं का गुणा

$pq \times ab$

सबसे पहले b का q से करे प्राप्त jk में **k** को लिखे
 b का p से करे व a का q से करें दोनों व j हासिल जोड़े प्राप्त lm में **m** लिखे
 अब a का p से करें व। हासिल जोड़े प्राप्त **no** को लिखे
 अतः अभीष्ट गुणनफल = **nomk**

गुणा कीजिए -

(क) 45×76

$$\begin{aligned} &\text{सबसे पहले 6 का 5 से करे } 30 \text{ में 0 को लिखे - } \mathbf{0} \\ &6 \text{ का 4 से करे व 7 का 5 से करें दोनों व 3 हासिल जोड़े 62 में 2 लिखे - } \mathbf{2} \end{aligned}$$

अब 7 का 4 से करें व 6 हासिल जोड़े 34 को लिखे - 34

अतः अभीष्ट गुणनफल = 3310

इसी प्रकार हल करके उत्तर की जाँच कीजिए

(ख) $87 \times 34 = 2958$

(ग) $56 \times 93 = 5208$

(घ) $23 \times 34 = 782$

जोड़े व किसी संख्या से कम अधिक हो।

सामान्य विधि :

$abc \times xy =$

$(x \times a + \text{carry})(y \times a + x \times b + \text{carry})(y \times b + x \times c + \text{carry})(y \times c)$

AB.. P Q R

$568 \times 34 = (15)(38)(48)(32) = 19312$

$99\dots \times ab\dots = (100\dots - 1) \times ab\dots$

$999 \times 356 = (1000 - 1) \times 356 = 356000 - 356 = 355644$

$499 \times 43 = (500 - 1) \times 43 = 21500 - 43 = 21457$

$9999 \times 68 = 680000 - 68 = 679932$

भाग तीव्र गति से करने के नियम :

नियम 1 : यदि संख्या को ये देखना हो कि यह किससे विभाज्य हैं, तो विभाज्यता के नियम से पता कीजिए। (भाग देने की आवश्यकता नहीं)

नियम 2 : यदि शेषफल ज्ञात करना हो, तो विभाज्य के नियम से छोटी शेषफल ज्ञात करें व ऋणात्मक या धनात्मक

नियम 3 : यदि संख्या पूर्णतः विभाज्य हैं, और केवल भागफल प्राप्त करना हैं, तो संख्या को विभाज्यता के नियम से काट - काट के छोटा करें।

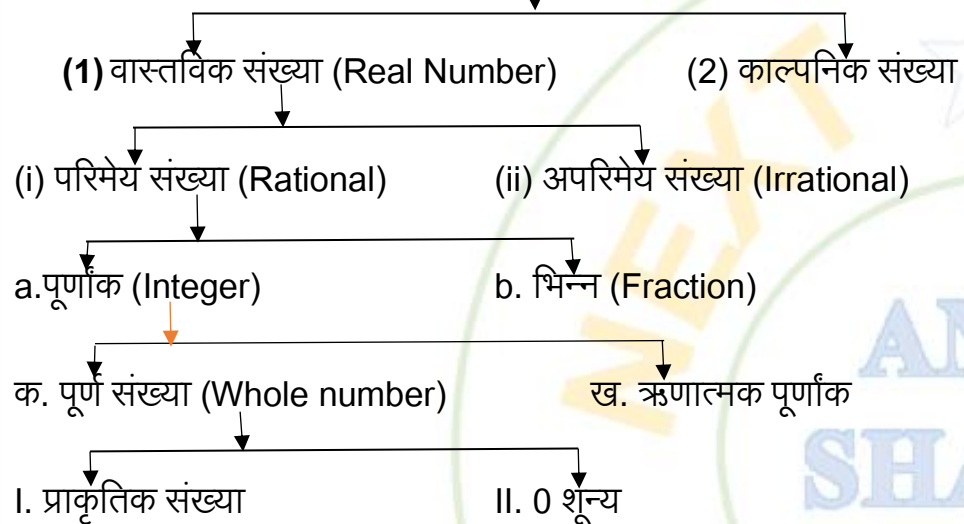
ध्यान देने योग्य : गणनायें कम समय व तेज गति से करने के लिए पहाड़े कम से कम 30 तक याद करे, घन 30 तक तथा वर्ग 50 तक याद करें। और निरंतर अभ्यास करें।

**** कठिन परिश्रम ही सफलता की कुंजी हैं। ****

****करत करत अभ्यास से जड़मत होय सुजान ****

- वह पद्धति जिसमें संख्याओं और उन गुणों का अध्ययन किया जाता है।
- अंक (Digit) – अंक गणित में संख्याओं के लिखने के संकेतों को अंक कहते हैं, ये 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 कुल दस होते हैं। इन से संकेतों द्वारा प्रयुक्त पद्धति दशमिक (Decimal) प्रणाली कहलाती है।

संख्या के प्रकार –



- **Natural number** – जिन संख्याओं से गिनती की क्रिया की जाती है, जैसे – 1, 2, 3, अनंत तक। इसे N से प्रकट करते हैं, हमेशा धनात्मक होती हैं।
- **पूर्ण संख्याये** – शून्य सहित सभी प्राकृतिक संख्याये पूर्ण संख्याये हैं जैसे – 0, 1, 2, 3, अनंत तक।
- सभी प्राकृतिक संख्याये पूर्ण संख्याये होती हैं, लेकिन सभी पूर्ण संख्याये प्राकृतिक नहीं होती हैं।
- **सम संख्याये (Even Number)** – दो से विभाज्य संख्याये सम संख्याये हैं

- सम संख्याओं का इकाई अंक 0, 2, 4, 6, 8 होता है।
- **विषम संख्याये (Odd Numbers)** – जो दो से विभाज्य न हों, जैसे – 1, 3, 5, 7, 11, इत्यादि।
- **अभाज्य संख्याये (Prime Number)** – जो स्वम् अथवा 1 से विभाज्य हो। जैसे – 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 इत्यादि।
- **यौगिक संख्या (Compound Number)** – वे संख्याये जो एक से बड़ी हो, और अभाज्य न हो जैसे – 6, 8, 10, 35, इत्यादि।
- **सह अभाज्य संख्याये** – दो प्राकृतिक संख्या जिनका महत्तम समावर्तक 1 हो, ऐसी संख्याएं सहअभाज्य होती हैं, जैसे – (2, 3), (4, 5) इत्यादि। ध्यान योग्य महत्वपूर्ण तथ्य
 - 0 शून्य का आविष्कार भारत में आर्यभट्ट द्वारा किया।
 - 0 न तो धनात्मक है न ऋणात्मक है।
 - 1 न तो भाज्य न ही अभाज्य संख्या।
 - 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो सम है।
 - 3 सबसे छोटी विषम अभाज्य संख्या हैं।
 - 4 सबसे छोटी भाज्य संख्या हैं।
 - 9 सबसे छोटी विषम भाज्य हैं।
 - 2 को छोड़कर सभी अभाज्य संख्या विषम संख्या है, लेकिन सभी विषम संख्या अभाज्य नहीं होती।
 - 5 से बड़ी किसी भी अभाज्य संख्या को 6 से भाग देने पर शेषफल 1 या 5 शेषफल 1 आता है।
 - 5 या 5 से बड़ी किसी भी अभाज्य संख्या को वर्ग को 12 से भाग देने पर शेषफल 1 आता है, जैसे - $5^2 = 25/12$ शेष = 1

- **संख्याये** - **कुल अभाज्य संख्यायें**
- 1 से 25 तक - 9 (2,3,5,7,11,13,17,19,23)
- 1 से 50 तक - 15
- 1 से 100 तक - 25
- 1 से 200 तक - 45

- **अभाज्य संख्या ज्ञात करने की विधि** – सबसे पहले दी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करें फिर वर्गमूल के निकट का पूर्णांक X ज्ञात करे फिर X से छोटी सभी संख्या से भाग दे यदि संख्या अभाज्य संख्याओं से भाज्य नहीं है, तो अभाज्य हैं – जैसे- 47

$7^2 > 47 > 6^2$ अब 47 को 5, 3, 2 से भाग नहीं लगता हैं अतः 47 अभाज्य हैं।

- **अंक का शुद्धमान या जातीयमान** – एक संख्या में किसी अंक का शुद्धमान उस अंक का अपना चाहे वह अंक किसी भी स्थान पर हो, जैसे – 5467 में 4 का जातीय मान 4 व 6 का 6 हैं।
- **स्थानीय मान** – कोई अंक जिस संख्या में जिस स्थान पर होता हैं, वही स्थानीय मान होता हैं। जैसे- 5687 में 6 का स्थानीय मान 600 व 8 का 80
- **गुणा का तत्समक** – 1 को गुणा का तत्समक कहते हैं, इससे कोई संख्या में गुणा करने पर फर्क नहीं पड़ता हैं।
- **जोड़ का तत्समक** – 0 शून्य

प्रतिलोम –

1. गुणा का प्रतिलोम : a का $1/a$ (जिस संख्या से गुणा करने पर 1 प्राप्त हो)
2. जोड़ का प्रतिलोम : a का $-a$ (जिस संख्या को जोड़ने या घटाने पर 0 हो)

क्रम (Order) –

- (i) **आरोही क्रम (Ascending Order)** – $1 < 2 < 3 < 4$ (बढ़ता क्रम)

- (ii) **अवरोही क्रम (Descending)**: $10 > 8 > 7 > 3 > 1$ (घटता क्रम)

- **विशुद्ध मान (absolute value)** : किसी संख्या का विशुद्ध मान साथ लगे चिह्नों को हटाकर प्राप्त करते हैं, जैसे - $|a|$ या $|-a| = a$

भाज्यता के नियम-

- **2 से विभाज्य** – किसी भी संख्या का इकाई अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो।
- **3 से विभाज्य** – जिन संख्याओं के अंको का योग 3 से विभाज्य हो, जैसे – 2349 का अंको का योग = $2 + 3 + 4 + 9 = 18$ अतः 18, 3 से विभाज्य इसलिए 2349 भी 3 से विभाज्य होगी।
- **4 से विभाज्य** – किसी संख्या के अंतिम दो अंको से बनी संख्या 4 से भाज्य हो। जैसे – 23460 में अंतिम दो अंको से संख्या 60, 4 से विभाज्य है, इसलिए यह संख्या 23460 भी 4 से पूर्णतः विभाज्य होगी।
- **5 से विभाज्य** – जिन संख्याओं का इकाई अंक 0 या 5 हो।
- **6 से विभाज्य** – जो संख्यायें 2 और 3 से विभाज्य हो। या जो सम संख्या 3 से विभाज्य हो। जैसे- 23454, 543312, 12, 18 आदि।
- **7 से विभाज्य** – किसी संख्या के इकाई अंक का दूना, इकाई का अंक छोड़ने से बनी संख्या में से घटाने पर नयी संख्या 7 से विभाज्य हो।
- **8 से विभाज्य** – जिस संख्या के अंतिम तीन अंक से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो।
- **9 से विभाज्य** – जिस संख्या के अंको का योग 9 से विभाज्य हो।
- **10 से विभाज्य** – जिन संख्याओं का इकाई या अंतिम अंक 0 हो।
- **11 से विभाज्य** – जिन संख्याओं के सम स्थानों के अंको का योग और विषम स्थानों के अंको का अंतर 0 या 11 के गुणन में हो। जैसे – 12342 में $(1 + 3 + 2) - (2 + 4) = 0$

- यदि कोई संख्या में एक ही अंक छः अंकीय जोड़े (जैसे- 111111, 222222, 5555555555) में लिखा हो तो वह संख्या हमेशा 3, 7, 11, 13, 37 से पूरी तरह विभाज्य होगी।
- यदि किसी संख्या में इस प्रकार अंक दोहराये जाये जैसे- 3535, 3333, 7878 आदि संख्या हमेशा 101 से पूर्णतः विभाज्य होगी।
- यदि किसी संख्या में इस प्रकार अंक दोहराये जाये जैसे- 436436, 762762, 222222 आदि संख्या हमेशा 1001 से पूर्णतः विभाज्य होगी।

साधारण भाग में पदों को ज्ञात करना।

भाजक Divisor) भाज्य Divident (भागफल Quotient

शेषफल Remainder

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

हाथ मिलना या उपहार देने या मैच खेलने के नियम

- i) a व्यक्तियों के समूह में जब प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक को उपहार दे, तो इस तरह **उपहारों की कुल संख्या = a(a - 1)**
- ii) n व्यक्तियों के समूह में जब सब एक-दूसरे से हाथ मिलाए, तो

कुल हाथ मिलाई = $\frac{n(n-1)}{2}$

इसी तरह यह टीमों के द्वारा मैच खेल जाते हैं।

शेषफल ज्ञात करना

किसी भी संख्या में भाग देते समय आप छोटी शेष प्राप्त कीजिए यदि वह ऋणात्मक है, तो भाजक से घटाकर धनात्मक बना लें। जैसे -

33-9=24अंक में 12 संख्यायें अतः कुल संख्यायें 9+12=21

■ $\frac{555555 \dots 56 \text{ बार}}{37} = \frac{6 \text{ अंकीय } 9 \text{ जोड़ें व } 2 \text{ अंक शेष } 55}{37} = \frac{55}{37} = R = 18$

- $16 \div 5$, शेषफल +1 व -4 उत्तर = 1
- $34 \div 7$, शेषफल -1 या +6 उत्तर = 6
- $\frac{45 \times 55}{8} = \frac{+5 \times (-1)}{8} = -\frac{5}{8}$ R= 8 - 5 = 3
- $\frac{1650 \times 1678 \times 95 \times 17}{16} = \frac{[(+2) \times (-2) \times (-1) \times (1)]}{16}$ R=4
- यदि किसी संख्या (भाज्य) के गुणनखण्ड में भाजक शामिल होता है, तो शेषफल 0 होता है। जैसे -
- $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 1500!$ में 12 का भाग लगाने पर शेषफल क्या प्राप्त होगा -
3! के बाद 4! से सभी में 12 शामिल हैं, जिनसे शेष प्राप्त 0 शून्य होगा।
अतः अभीष्ट शेषफल = 1+2+6 = 9
- जब अंश पर घात हो व अंश हर से छोटा हो तो अंश को हर के निकटवर्ती घात को खोल कर बड़ा कर लेते हैं, फिर शेष ज्ञात करते हैं, जैसे -
- $\frac{2^{45}}{33} = \frac{(2^5)^9}{33} = \frac{32^9}{33} = (-1)^9 = -1$ R=33-1=32
- $\frac{5^{500}}{500} = \frac{5^3 \times 5^{497}}{500} = \frac{5^{497}}{4} = 1^{497} \Rightarrow 1 \times 125$ R=125
- यदि किसी संख्या में अंश के अंक क्रमागत हो, तो हर से विभाजित करते समय विभाजिता के नियम से शेषफल ज्ञात करते हैं। जैसे-
 $\frac{1234 \dots 33 \text{ अंक}}{8} = \frac{1234 \dots 192021}{8}$ R=5
क्योंकि 1 से 9 तक - 1 अंकीय, 9 के आगे - 2 अंकीय

$$\blacksquare \frac{10^1+10^2+10^3+10^4+\dots\dots\dots+10^{100}}{6}, R=?$$

$$\frac{10+100+1000}{6} = \frac{4+4+4}{6} r_1 = 0 \text{ यहाँ प्रत्येक तीसरे पद के बाद } r_1 = 0$$

$$\text{शेषफल 0 हो जाता है, तब } 33 \times 3 = 99 \text{ पद तक शेषफल 0 रहेगा। अतः अभीष्ट शेषफल} = \frac{10^{100}}{6} \Rightarrow R = 4$$

$$\blacksquare \frac{29^{29}-23^{27}+17^{29}}{23} = \frac{6^{29}-0+(-6)^{29}}{23} = \frac{0}{23} \Rightarrow R=0$$

क्रमागत भाग पर आधारित

किसी संख्या को क्रमागत a, b, c से भाग देने पर क्रमशः x, y, z शेष आये तो अभीष्ट संख्या N होगी -

भाजक	भाज्य	भागफल	शेषफल	अथवा	भाजक	शेषफल	भागफल	भाज्य
a	$a[b(c+z)+y]+x$	$b(c+z)+y$	x		c	z	1	c+z
b	$b(c+z)+y$	c+z	y		b	y	c+z	$b(c+z)+y$
c	$(c+z)$	1	z		a	x	$b(c+z)+y$	$a[b(c+z)+y]+x = N$

● किसी संख्या को क्रमागत 2, 3 व 4 से भाग देने पर क्रमशः 1, 2 व 3 शेष बचते हैं, तो संख्या हैं -

● किसी संख्या को क्रमागत 4, 7 व 9 से भाग देने पर क्रमशः 3, 5 व 7 शेष बचते हैं, तो संख्या हैं -

हल: भाजक	4	3	2
शेषफल	3	2	1
भाजक	7	$(7 \times 3)+2=23$	$(23 \times 2)+1=47$

हल: भाजक	9	7	4
शेषफल	7	5	3
भाजक	16	$(16 \times 7)+5=117$	$(117 \times 4)+3=471$

इकाई अंक / एकल अंक ज्ञात करना

यदि $(ab \dots x)^n$, तो सबसे पहले n में 4 से भाग देते हैं

शेषफल	-	स्थिति
1	-	x^1
2	-	x^2
3	-	x^3

उदाहरण- 1114^{97} का इकाई का अंक क्या होगा -
हल: 97 में 4 का भाग देने पर 1 शेषफल प्राप्त होता है, अतः इकाई अंक $4^1 = 4$ होगा।

नोट— किसी संख्या का इकाई अंक यदि 1, 5, 6, 0 तो घात कितनी भी हो तो इकाई अंक वही रहता है।

शून्यो की संख्या ज्ञात करना—

• $2^{12} \times 3^{10} \times 5^{10}$ में दायी ओर से शून्यों की संख्या क्या होगी—

solve इस तरह के प्रश्न में ऐसे जोड़े बनाते है जिनका गुणा 10 के गुणन में होता है, तब इसमें $(2 \times 5)^{10}$ होगा अतः इसमें दायी ओर से शून्यो की संख्या 10 होगी।

• $n!$ में शून्यों की संख्या ज्ञात करना—

$$\frac{n}{5} + \frac{n}{25} + \frac{n}{125} + \dots + \frac{n}{5^a} \text{ जब तक कि } 5^2 \geq n$$

• **223!** में दायी ओर से शून्यों की संख्या कितनी है—solve: संख्या = $\frac{223}{5} + \frac{223}{25} + \frac{223}{125} + \frac{223}{625} = 44 + 8 + 1 = 53$ Ans.

दी गई सीमा के अंतर्गत संख्यायें ज्ञात करना

n अंकीय कुल संख्यायें = n अंक की सबसे बड़ी संख्या - $(n-1)$ अंक की सबसे बड़ी संख्या

• 1 अंकीय कुल संख्यायें = 9

• 3 अंकीय कुल संख्यायें = $999 - 99 = 900$

• 2 अंकीय कुल संख्यायें = $99 - 9 = 90$

• 4 अंकीय कुल संख्यायें = $9999 - 999 = 9000$

$$x \text{ से } y \text{ तक } a \text{ से विभाज्य कुल संख्यायें} = \frac{y(\text{बड़ी संख्या})}{a(\text{भाजक})} - \frac{x(\text{छोटी संख्या})}{a(\text{भाजक})} = \text{भागफल}$$

• 100 से 900 तक 3 से विभाज्य कुल संख्यायें बताइये-

• 4 अंकों की कितनी संख्यायें 7 से विभाज्य होगी -

$$\text{हल: अभीष्ट संख्याये} = \frac{900}{3} - \frac{100}{3} = 300 - 33 = 267$$

$$\text{हल: अभीष्ट संख्यायें} = \frac{9999}{7} - \frac{999}{7} = 1428 - 142 = 1286$$

दो अंकीय संख्याओं के गुण।

• दो अंको की संख्या = ab या $(10a+b)$

• संख्याओं (ab, ba) का योग = अंको (a, b) का योग $\times 11$

• अंक पलटने से बनी संख्या = ba या $(10b+a)$

• संख्याओं (ab, ba) का अंतर = अंको (a, b) का अंतर $\times 9$

किसी संख्या के गुणखंडों की संख्या व योग तथा गुणनफल ज्ञात करना ।

संख्या 120 के कुल गुणखण्डों की संख्या व अभाज्य गुणखण्डों तथा सम गुणखण्डों की संख्या व विषम गुणखण्डों की संख्या

$$120 = 3^1 \times 2^3 \times 5^1$$

कुल गुणखण्डों की संख्या = सभी अभाज्य गुणखण्डों की घातों में एक जोड़कर आपस में गुणा

$$= (1 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 2 \times 4 \times 2 = 16$$

अभाज्य गुणखण्डों की कुल संख्या = अभाज्य गुणखंडों की घातों का योग

$$= 1 + 3 + 1 = 5$$

विषम गुणखण्डों की कुल संख्या = (प्रथम विषम अभाज्य की घात + 1) × (द्वितीय विषम अभाज्य की घात + 1) ×

$$= (1 + 1)(1 + 1) = 2 \times 2 = 4$$

सम गुणखण्डों की कुल संख्या = (सम अभाज्य संख्या की घात) × (प्रथम विषम अभाज्य की घात + 1) × (द्वितीय विषम अभाज्य की घात + 1) ...

$$= 3 \times 2 \times 2 = 12$$

सभी गुणखंडों का कुल योग = अभाज्य गुणखंडों को 0 घात से उनकी घात तक रख जोड़े व सभी गुणखण्डों के अभीष्ट योग का आपस में गुणा करें

$$= (3^0 + 3^1)(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(5^0 + 5^1)$$

$$= (4)(1 + 2 + 4 + 8)(6) = 4 \times 15 \times 6 = 360$$

सम गुणखण्डों का कुल योग = सम गुणखण्ड की 0 की घात छोड़कर

$$= (2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1) = 14 \times 4 \times 6 = 336$$

विषम गुणखंडों का कुल योग = सम गुणखंडों को छोड़कर

$$(5^0 + 5^1) = 4 \times 6 = 24$$

$$\text{सभी गुणखण्डों का गुणनफल} = (\text{संख्या})^{\frac{\text{कुल गुणखंडों की संख्या}}{2}}$$

$$= (120)^{\frac{16}{2}} = 120^8$$

विभिन्न टाइप के सवालों का संक्षिप्त हल :

1. गुणनफल $(234 \times 341 \times 446 \times 229)$ में इकाई अंक क्या हैं?

- क. 3 ख. 4 ग. 5 घ. 6 ड. इनमें से कोई नहीं।

$$234 \times 341 \times 446 \times 229$$

इकाई अंक $4 \times 1 \times 6 \times 9$

$4 \quad 24 \quad 36$

इकाई अंक = 6 Answer.

2. 67^{105} में इकाई अंक क्या हैं?

- क. 5 ख. 7 ग. 9 घ. 1

$$67^{105} = 7^{105/4 \text{ Remain}} = 7^1 = 7 \text{ Unit digit}$$

3. प्रथम 10 सम संख्याओं का योगफल कितना होगा—

- क. 110 ख. 100 ग. 220 घ. कोई नहीं।

$$2, 4, \dots, \dots, \dots, 20$$

$$\text{Sum} = \frac{20(2 + 20)}{2} = 220 \text{ Ans.}$$

4. $1 + 2 + 3 + \dots + 50$ का योगफल कितना होगा?

- क. 1255 ख. 1250 ग. 1350 घ. कोई नहीं।

$$\text{Sum} = \frac{50(1 + 50)}{2} = 25 \times 51 = 1275 \text{ Ans.}$$

5. यदि संख्या $67235x489$, 9 से पूर्णतः विभाजित है तो x का मान होगा?

- क. 1 ख. 3 ग. 5 घ. 7

$$\frac{6 + 7 + 2 + 3 + 5 + x + 4 + 8 + 9}{9}$$

$$\frac{44 + x}{9} \text{ If } x = 1 \text{ then } \frac{45}{9}$$

6. यदि p और q आपेक्षित अभाज्य संख्याएं इस प्रकार हैं कि $p + q = 10$ और $p < q$, p और q के कितने युग्म संभव होंगे।

- क. 2 ख. 3 ग. 1 घ. 0

$$p + q = 10 \text{ then prime}$$

$$(p, q) = (3, 7), (5, 5)$$

अतः 2 युग्म होंगे।

7. यदि संख्या $6784329x145$, 11 से पूर्णतः विभाजित है, तो x का मान होगा?

- क. 3 ख. 4 ग. 5 घ. 7

11 से विभाज्य के लिए = 0 या 11 का गुणन

$$= (6 + 8 + 3 + 9 + 1 + 5) - (7 + 4 + 2 + x + 4)$$

$$= 32 - 17 - x = 15 - x \text{ If } x = 4 \text{ then}$$

$$= 15 - 4 = 11$$

8. व्यंजक $7^{35} \times 3^{71} \times 11^{55}$ का इकाई अंक होगा?

क. 3 ख. 0 ग. 1 घ. 6

$$\text{इकाई अंक} = 7^3 \times 3^3 \times 1 = 3 \times 7 \times 1 = 21 = 1$$

9. यदि एक तीन अंकों की संख्या को दोहराकर एक छः अंकों की संख्या बनाई जाती है जैसे 656656, 214214 यह संख्या हमेशा किससे विभाजित होगी?

क. 7 ख. 11 ग. 13 घ. 1001

विकल्प से हम देखते हैं कि 1001 में यदि किसी तीन अंक की संख्या का गुणा करते हैं तो उस संख्या के अंक दो बार दोहराते हैं। जैसे—
 $1001 \times abc = abcabc$

10. निम्न व्यंजक का इकाई अंक होगा। $922^{111} - 328^{113} - 156^{123} - 229^{111} - 124^{29}$

क. 1 ख. 4 ग. 5 घ. 2

$$\text{इकाई अंक} = 2^3 - 8^1 - 6 - 9 - 4^1 = 8 - 27 = 8 - 7 = 1$$

11. यदि एक दो अंकों की संख्या को दोहराकर एक चार अंकों की संख्या बनाई जाती है जैसे 2525 यह संख्या हमेशा किससे विभाजित होगी?

क. 1001 ख. 101 ग. 10001 घ. 10101

विकल्प से 101 में दो अंकों की संख्या का गुणन करने पर दोहरा जाएगी जैसे— $101 \times ab = abab$

12. निम्न व्यंजक का इकाई अंक होगा। $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 100!$

क. 3 ख. 4 ग. 6 घ. 8

$$\begin{aligned} \text{इकाई अंक} &= 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + \dots \dots \dots 0 \\ &= 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots \dots 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

13. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \dots \dots \times 500$ में शून्यों की संख्या होगी।

क. 25 ख. 30 ग. 28 घ. 31

$$\begin{aligned} 500! \text{ में दायी और शून्यों की संख्या} \\ = \frac{500}{5} [100] + \frac{100}{5} [20] + \frac{20}{5} [4] + \frac{4}{5} [Not] = \\ 100 + 20 + 4 = 124 \end{aligned}$$

14. व्यंजक $(8^{253} - 8^{252} - 8^{251})(3^{221} - 3^{220} - 3^{219})$ में शून्यों की संख्या होगी।

क. 1 ख. 2 ग. 3 घ. 0

$$\begin{aligned} &= 8^{251}(8^2 - 8 - 1)3^{219}(3^2 - 3 - 1) \\ &= 8^{251}(55)3^{219}(5) \text{ शून्य के लिए 5 व 2 के युग्म} \\ &= 5^2 8^{251}(11)3^{219} \\ &= 2(\text{Zero}) \end{aligned}$$

15. $\frac{1372 \times 1276}{9}$ में शेषफल होगा।

क. 1 ख. 2 ग. 3 घ. 7

$$\frac{1372 \times 1276}{9} = \frac{3 \times 7}{9} = \frac{21}{9} = \text{Remain 3}$$

16. जब $17^{23} + 29^{23}$ को 23 से भाग किया जाये तो शेषफल होगा।

क. 0 ख. 1 ग. 2 घ. 3

$$\text{Remain} = (-6)^{23} + 6^{23} = 0$$

17. जब $4^{5^6 7^8 9^{10}}$ को 6 से भाग किया जाये तो शेषफल होगा।

क. 2 ख. 3 ग. 4 घ. 5

$$\text{If } \frac{4^n}{6} \text{ then Always Remainder} = 4$$

18. जब $(7777777 \dots \dots \dots 100 \text{ times})$ को 13 से भाग किया जाये तो शेषफल होगा।

क. 10 ख. 3 ग. 4 घ. 5

इसमें 13 से भाग देने पर छः 777777 के बाद फिर वही चक्र शुरू हो जाता है यानि 777777 के बाद शेष 0 अतः 100बार सात में 6 से जोड़े बनने के बाद चार 7777 शेष बचते हैं जिसमें 13 का भाग देने पर 3 शेष आते हैं।

13) 777777 100times (59829

65	↓	
127		
117		
107		
104		
37		
26		
117		
117		
77		

19. जब $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \dots \dots \dots + 10^{10000000000}$ का 7 से भाग किया जाये तो शेषफल होगा।

क. 0 ख. 2 ग. 4 घ. 6

7) 1000000 0000 (1

7		60	10000
30		56	
28		40	
20		35	
14		50	
60		49	

$$\frac{10^{10}}{7} = \text{Remainder 4 then}$$

$$\text{मुर्गी} = 45$$

$$\text{गाय} = 81 - 45 = 36$$

20. $32^{32^{32}}$ को 11 से भाग किया जाये तो शेषफल होगा।

क. 10 ख. 1 ग. 3 घ. 2

$$\frac{32^{32^{32}}}{11} = \text{Remain} \frac{(-1)^{32^{32}}}{11} = \frac{1}{11} = 1 \text{Remain}$$

21. व्यंजक 8315945×8315947 में क्या जोड़ा जाये कि पूर्ण वर्ग बन जाये।

क. 10 ख. 1 ग. 8315945 घ. 831594

22. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 10^3 = 3025$ हो तो $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$ का मान होगा।

क. 2875 ख. 24200 ग. 3080 घ. 39400

$$2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 10^3) = 8 \times 3025 = 24200$$

23. कृष्णा के पास कुछ मुर्गी और कुछ गाय हैं, यदि कुल सिर गिने जायें तो 81 हैं और कुल टांगे 234 हैं तो उसके पास कितनी गाय है।

क. 45 ख. 24 ग. 36 घ. कोई नहीं।

$$\text{कुल गाय व मुर्गी} = 81$$

$$\text{कुल पैर (यदि सभी गाय)} = 81 \times 4 = 324$$

$$\text{कुल पैर (दोनों)} = 234$$

$$2 \times \text{मुर्गी (अंतर मुर्गी के कारण)} = 90$$

24. एक आदमी ने एक नौकर को इस शर्त पर नियुक्त किया कि वह उसे 3000 रु. देगा और एक साल बाद वर्दी देगा। उसने 9 महीने काम किया और 2200 रु. और एक वर्दी मिली तो उसकी वर्दी की कीमत क्या है?

क. 100

ख. 200

ग. 250 घ. 400

$$\frac{3000 + x}{12} = \frac{2200 + x}{9} \Rightarrow \frac{3000 + x}{4} = \frac{2200 + x}{3}$$
$$9000 + 3x = 8800 + 4x \Rightarrow x = 200Rs.$$

25. एक ठेकेदार ने एक मजदूर को इस शर्त पर नियुक्त किया कि वह उसे प्रतिदिन 75रु देगा लेकिन उसकी अनुपस्थिति के लिए एक दिन का 15 रु जुर्माना करेगा। 20 दिन के बाद ठेकेदार मजदूर को 1140 रु देता है तो मजदूर कितने दिन अनुपस्थित रहा।

क. 3 दिन ख. 4दिन

ग. 5 दिन घ. 2 दिन।

$$20 \text{ दिन की मजदूरी} = 20 \times 75 = 1500$$

$$\text{दी मजदूरी (15रु जुर्माना के कारण)} = 1140$$

$$(15 + 75) \text{अनुपस्थिति दिन} = 360$$

$$\text{अनुपस्थित दिन} = 360/90 = 4 \text{ Days}$$

26. एक शहर में टैक्सी का किराया एक निश्चित दूरी तक नियत है तथा उसके बाद प्रति किमी अतिरिक्त देय है। यह किराया 5 किमी. तक नियत है तथा उसके बाद प्रति किमी अतिरिक्त देय है, 10 किमी दूरी

का कुल किराया 350 रु तथा 25 किमी दूरी का 800 रु है, तो 30 किमी. दूरी का कितना किराया होगा?

क. 900 ख. 950रु ग. 800 रु घ. 750 रु. |

10km → 350 (5किमी नियत व 5किमी अतिरिक्त)
 25km → 800 (5किमी नियत व 20किमी अतिरिक्त)
 15km → 450 (15किमी अतिरिक्त) ⇒ 5km अतिरिक्त = 150
 30किमी का किराया(5किमी नियत व 20किमी अतिरिक्त +5किमी अतिरिक्त) = 800 + 150 = 950

27. किसी संख्या को 899 से भाग देने पर 63 शेष बचता है। उसी संख्या को 29 से भाग देने पर क्या शेष बचेगा?

क. 10 ख. 5 ग. 4 घ. 2

899 → Remain 63
 29 → 29) 63 (2
 58

 5Remain

28. किसी संख्या को 56 से भाग देने पर 29 शेष बचता है। उसी संख्या को 8 से भाग देने पर क्या शेष बचेगा?

क. 4 ख. 5 ग. 3 घ. 7

56 → 29Remain
 तथा $\frac{56x+29}{8} \rightarrow 29 - 24 = 5Remain$

29. किसी संख्या को क्रमशः 4 और 5 से भाग देने पर शेषफल 1 और 4 प्राप्त होते हैं, उसी संख्या को क्रमशः 5 और 4 से भाग देने पर शेषफल क्या प्राप्त होगा?

क. 4,1 ख. 3, 2 ग. 2,3 घ. 1, 3

भाजक	शेषफल	भाज्य	
5	4	(5 + 4) = 9	
4	1	(4 × 9 + 1) = 37 संख्या	
भाजक	भाज्य	भागफल	शेषफल
5	37	7	2
4	7	1	2

30. यदि दो संख्याओं का अलग-अलग 33 से भाग दिया जाये तो क्रमशः 21 और 28 शेष बचते हैं। यदि उन संख्याओं के योग को 33 से भाग दिया जाये तो शेष क्या बचेगा?

क. 10 ख. 12 ग. 14 घ. 16

पहली संख्या	दूसरी संख्या
$33x + 21$	$33x + 28$
योग /33 = $(66x + 49)/33 = \text{remain } 16$	
संक्षिप्त विधि-	
यदि भाजक वही हैं तो शेषफल जोड़कर भाजक से भाग दे देते हैं अतः योग\33 = $\frac{21+28}{33} = \text{remain } 16$	

31. $(49^{15} - 1)$ निम्न में से किस संख्या से विभाजित होगा?

क. 50 ख. 51 ग. 29 घ. 8

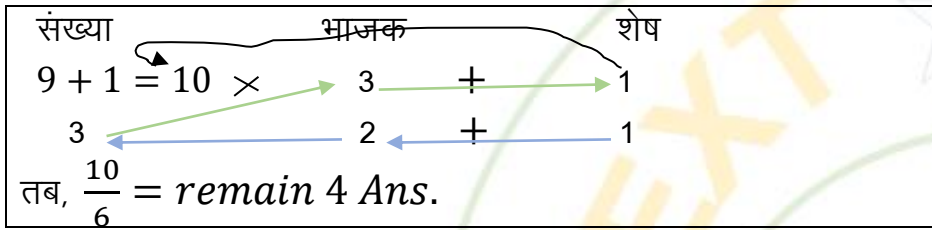
विकल्प से 50 से भाग देने पर शेष = $(-1)^{15} - 1 = -2$

विकल्प से 8 से भाग देने पर शेष = $(1)^{15} - 1 = 0$

उत्तर- 8

32. किसी संख्या को 3 से भाग देने पर 1 शेष बचता है। यदि भागफल को 2 से भाग दिया जाये तो 1 शेष बचता है, यदि संख्या को 6 से भाग दिया जाये तो शेषफल क्या बचेगा?

क. 3 ख. 4 ग. 5 घ. 2



33. 'एक' है-

(क). अभाज्य संख्या (ख). भाज्य संख्या
(ग). क और ख दोनों (घ). न तो क और न तो ख

उत्तर - घ

34.2 और 3 के बीच अपरिमेय संख्या होगी-

क. $\sqrt{6}$ ख. $\sqrt{5}$ ग. $\sqrt{7}$ घ. $\sqrt{8}$

$\sqrt{6}$

35. 100 से 600 के मध्य 4 और 6 दोनों संख्याओं से विभाजित पूर्णांक कितने होंगे?

क. 40 ख. 42 ग. 41 घ. 50

4 और 6 दोनों से विभाज्य पहली संख्या 12 होगी।

पूर्णांक = $\left(\frac{600}{12} - \frac{100}{12}\right) = 50 - 8 = 42$ Ans.

36.3 से 200 के मध्य कितनी प्राकृतिक संख्याएँ 7 से विभाजित होंगी?

क. 27 ख. 28 ग. 29 घ. 36

संख्या = $\frac{200}{7} - \frac{3}{7} = 28 - 0 = 28$ Ans.

37. एक दो अंको की संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक का वर्ग है, अंको को पलट देने पर बनी संख्या और मूल संख्या का अंतर 54 है, मूल संख्या क्या है?

क. 24 ख. 39 ग. 54 घ. 93

संख्या = xy $x^2 = y$

अंको का अंतर = संख्याओं का अंतर / 9 = $\frac{54}{9} = 6$

अतः विकल्प से 39

38. एक दो अंको की संख्या अंको के योग का 5 गुना है, यदि संख्या में 9 जोड़ दिया जाये तो अंक आपस में स्थान बदल लेते हैं। अंको का योग होगा-

क. 11 ख. 9 ग. 7 घ. 6

संख्या xy तब

$10x + y = (x + y)5 \Rightarrow 5x = 4y \Rightarrow x:y = 4/5$

यहाँ संख्या के अंक 4:5 के अनुपात में होंगे

अतः संख्या 45 तब $45 + 9 = 54$

39. यदि 100 और 1000 के बीच किसी संख्या के अंको का योग संख्या में से घटाया जाये तो परिणाम सदैव विभाजित होगा-

क. 6 से ख. 2 से ग. 9 से घ. 5 से।

$101 - 2 = 99, 102 - 3 = 99, 234 - 9 = 225,$
 $453 - 12 = 441$ इससे स्पष्ट हैं कि परिणाम सदैव 9 से विभाज्य होगा।

शेष = 46
भाजक = $46 \times 5 = 230$ भागफल = $\frac{230}{10} = 23$
भाज्य = $230 \times 23 + 46 = 5290 + 46 = 5336$

40. 1000 में क्या न्यूनतम संख्या जोड़ी जाये ताकि योग 45 से पूर्णतः विभाजित हो जाये?

क. 35 ख. 80 ग. 20 घ. 10

विधि-1 $45 \overline{) 1000} \begin{array}{r} 22 \\ \underline{90} \\ 100 \\ \underline{90} \\ 10 \end{array}$ 10शेष + 35Ans.	विधि-2 (बिना पेन पेपर) $45 = 5 \times 9$ विकल्प से 1035 न्यूनतम संख्या विभाज्यता के नियम से 9 व 5 दोनों से विभाज्य हैं। लेकिन 1080 भी विभाज्य हैं पर यह 1035 से बड़ी है।
---	--

41. 5 अंको की सबसे छोटी संख्या जिसका एक गुणनखण्ड 234 हो?

क. 10296 ख. 10062 ग. 10620 घ. 10260

विधि 1- $234 \overline{) 10000} \begin{array}{r} 43 \\ \underline{936} \\ 640 \\ \underline{702} \\ -62 \text{ कमी} \end{array}$ अतः $10000 + 62 = 10062$	विधि-2 $234 = 2 \times 9 \times 13$ अतः विकल्प से न्यूनतम 10062, 2, 9, 13 से विभाज्य हैं।
--	---

42. भाग के एक प्रश्न में, भाजक भागफल का 10 गुना और शेषफल का 5 गुना है। यदि शेषफल 46 हो तो भाज्य क्या होगा?

क. 4236 ख. 4306 ग. 4336 घ. 5336

43. एक छात्र से किसी धन का $\frac{3}{4}$ ज्ञात करने के लिए कहा गया, लेकिन उस छात्र ने गलती से $\frac{3}{4}$ से भाग दे दिया, अतः उसको उत्तर सही उत्तर से 35रु अधिक आया। तदनुसार सही उत्तर क्या था?

a. Rs9 b. 24Rs c. 45Rs d. 1320Rs

$$\left(x \times \frac{4}{3} - x \times \frac{3}{4}\right) = 35 \Rightarrow x \times \frac{7}{12} = 35$$

$$x = 5 \times 12 = 60 \text{ then}$$

$$60 \times \frac{3}{4} = 45 \text{ Answer.}$$

44. 51 से 100 तक की सभी प्राकृतिक संख्याओं का योग क्या है?

a. 5050 b. 4275 c. 4025 d. 3775

$$\text{कुल संख्याये} = 100 - 51 + 1 = 50$$

$$\text{योग} = \frac{[50(51+100)]}{2} = 25 \times 151 = 3775$$

45. 3 क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग 2030 है बीच की संख्या क्या है?

a. 25 b. 26 c. 27 d. 28

$$x^2 + x^2 + 1 + 2x + x^2 + 4 + 4x = 2030$$

$$3x^2 + 6x + 5 = 2030 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 2025 = 0$$

$$x^2 + 2x - 675 = 0 \Rightarrow +27, -25$$

$$Ans. = 27$$

विधि-2 तीन क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग
 $3x^2 + 6x + 5 = \text{योग}$

46. दो संख्याओं का योग 40 और उनका गुणनफल 375 है, संख्याओं का व्युत्क्रमों का योग कितना है?

a. $\frac{8}{75}$ b. $\frac{1}{40}$ c. $\frac{75}{8}$ d. $\frac{75}{4}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{40}{375} = \frac{8}{75} \text{ Answer.}$$

47. दो धनात्मक संख्याओं का अंतर 3 है, यदि उनके वर्गों का योग 369 हो तो संख्याओं का योग कितना है?

a. 81 b. 33 c. 27 d. 25

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \\ 9 &= 369 - 2xy \Rightarrow 2xy = 360 \\ (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy = 369 + 360 = 729 \\ x+y &= 27 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

48. दो संख्याओं का योग और गुणनफल क्रमशः 13 और 15 है, उनके व्युत्क्रमों का योग कितना है?

a. $\frac{15}{13}$ b. $\frac{13}{15}$ c. $\frac{2}{13}$ d. $\frac{2}{15}$

$$\text{व्युत्क्रमों का योग} = \frac{13}{15}$$

49. एक व्यक्ति पांच दिन में कुल 100 सेब खाता है। प्रत्येक दिन वह पिछले दिन की अपेक्षा 6 सेब अधिक खाता है। ज्ञात कीजिए उसने प्रथम दिन कितने सेब खाये?

a. 8 b. 12 c. 54 d. 76

$$5x + 6 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 100 \Rightarrow 5x = 40 \\ x = 8 \text{ Answer.}$$

50. एक पिकनिक पार्टी का प्रत्येक सदस्य, सदस्यों की कुल संख्या के दोगुने रूपसे देता है। यदि कुल संकलन 3042 रु हो तो पार्टी में सदस्यों की संख्या कितनी है?

a. 2 b. 32 c. 40 d. 39

$$\begin{aligned} \text{सदस्य } x \\ x \times 2x &= 3042 \Rightarrow x^2 = 1521 \Rightarrow x = 39 \end{aligned}$$

51. कुछ मित्रों ने पिकनिक पर जाने की योजना बनायी और 108 रु भोजन पर खर्च करना निर्धारित किया। उनमें से तीन किसी कारणवश नहीं जा पाये। अतः शेष मित्रों को 3 रु अतिरिक्त देने पड़े। पिकनिक पर जाने वाले मित्रों की संख्या कितनी थी?

a. 15 b. 12 c. 9 d. 6

$$\begin{aligned} \frac{108}{x} - \frac{108}{x+3} &= 3 \Rightarrow 108 \times \frac{3}{x(x+3)} = 3 \\ \Rightarrow 108 &= x(x+3) \text{ from option } 9 \times 12 \\ \text{Ans.} &= x = 9 \end{aligned}$$

भिन्न – किसी संख्या को अंश व हर रूप में व्यक्त करना भिन्न कहलाता है।

जैसे- $a/b, \frac{1}{2}, \frac{-3}{5}$ आदि।

भिन्न के प्रकार –

1. साधारण भिन्न

$$\frac{a}{b}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$$

2. मिश्र भिन्न

$$p\frac{a}{b}, 1\frac{2}{3}$$

साधारण भिन्न को मिश्र भिन्न में बदलना –

$$\frac{a(\text{अंश})}{b(\text{हर})} \rightarrow \text{हर) अंश (भागफल} \rightarrow \text{भागफल} \frac{\text{शेषफल}}{\text{हर}}$$

$$\frac{7}{3} \rightarrow \text{मिश्र भिन्न} \rightarrow 2\frac{1}{3} \quad \text{और} \quad \frac{9}{2} \rightarrow \text{मिश्र भिन्न} \rightarrow 4\frac{1}{2}$$

मिश्र भिन्न को साधारण भिन्न में बदलना –

$$\frac{\text{शेषफल}}{\text{भागफल}} \rightarrow \text{साधारण भिन्न} \rightarrow \frac{\text{भागफल} \times \text{हर} + \text{शेषफल}}{\text{हर}}$$

$$2\frac{1}{3} \rightarrow \text{साधारण भिन्न} \rightarrow \frac{2 \times 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$$

दशमलव संख्या को भिन्न में बदलना

$$0.x = \frac{x}{10}, 0.xyz = \frac{xyz}{1000}, a.x = \frac{ax}{10}, a.bx \dots = \frac{abx..}{100..}$$

(अतः जितने अंक दशमलव के दायीं ओर हो उतने ही शून्य हर में 1 के बाद)

$$3.2 \rightarrow \text{भिन्न} \rightarrow \frac{32}{10} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} \quad \text{और} \quad 3.69 \rightarrow \text{भिन्न} \rightarrow \frac{369}{100}$$

आवर्ती दशमलव संख्या को भिन्न में बदलना –

$$0.a = \frac{a}{9}, \quad 0.ab = \frac{ab}{99}, \quad 0.abc \dots = \frac{abc \dots}{999 \dots}$$

$$0.3 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad 0.31 = \frac{31}{99}, \quad 0.123 = \frac{123}{999}$$

$$0.ab = \frac{ab - a}{90}, \quad 0.abc = \frac{abc - a}{990}, \quad 0.abc = \frac{abc - ab}{900}$$

$$0.1\bar{2} = \frac{12 - 1}{90} = \frac{11}{90}, \quad 0.1\bar{23} = \frac{123 - 1}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$$

$$0.1\bar{23} = \frac{123 - 12}{900} = \frac{111}{900}, \quad 1.1\bar{2} = 1 + 0.1\bar{2} = 1\frac{11}{90}$$

• $(0.\bar{11} + 0.\bar{22}) \times 3$ का मान ज्ञात कीजिए-

$$\text{हल } (0.\bar{11} + 0.\bar{22}) \times 3 = \left(\frac{11}{99} + \frac{22}{99}\right) \times 3 = 1$$

• $3.\bar{36} + 5.\bar{34} + 3.\bar{10}$

$$3 + \frac{36}{99} + 5 + \frac{34}{99} + 3 + \frac{10}{99} = 11 + \frac{84}{99} = 11.\bar{84}$$

$$3.\overline{856} + 3.\overline{74} + 5.85\overline{76} \quad \text{उत्तर} = \mathbf{12.461\overline{70}}$$

दशमलव के बाद ज्यादा से ज्यादा कितने अंकों पर बार नहीं है = 3	जितना ल.स. आए उतने अंक यहां लो = 2	यहां कितने भी ले लो
2 . 8 5 6	5 6	5 6 5 6 5 6 5 6
3 . 7 4 7	4 7	4 7 4 7 4 7 4 7
5 . 8 5 7 6	6 6	6 6 6 6 6 6 6 6
12 . 4 6 1 7 0	7 0	7 0 7 0 7 0 6 9

भिन्नों की तुलना करना -

- i) जब हर समान हो तो जिस भिन्न का अंश बड़ा वह बड़ी और जिसका अंश छोटा वह छोटी भिन्न होती हैं। जैसे - $\frac{23}{45} < \frac{43}{45}$
- ii) जब अंश समान हो तो जिस भिन्न का हर बड़ा वह छोटी भिन्न और जिसका हर छोटा वह बड़ी भिन्न होती हैं। जैसे - $\frac{67}{34} > \frac{67}{45}$
- iii) जब अंश व हर अलग-अलग हो, तो हर को समान करके, अंशों की तुलना कर लेते हैं, या हर का अंश में भाग देकर भागफल की तुलना करते हैं। जैसे-
- iv) यदि सभी भिन्नों के अंश व हर का अंतर समान हो तो वह भिन्न बड़ी होती हैं, जिसका अंश बड़ा अन्य से हो। जैसे- $\frac{5}{7} < \frac{13}{15}$
- Or $\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{16}{20}, \frac{15}{20} \Rightarrow 16 > 15 \therefore \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$
- Or $\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \Rightarrow 0.8, 0.7 \Rightarrow 0.8 > 0.7 \therefore \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$
(इस नियम से किसी भी तरह की भिन्नों की तुलना कर सकते हैं)

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{2}{7} + \frac{4}{13} - \frac{3}{10} + \frac{5}{16} - \frac{4}{13}\right) = \frac{5}{16}$$

$$13. \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} - \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \right\}}$$

बराबर है :

a) 2/3

c) 3/4

b) 47/60

d) 49/60

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = (a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]$$

$$\text{Then } \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60}$$

14. सरल गुणफल होगा -

$$\left(2 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{3}{5}\right) \left(2 - \frac{5}{7}\right) \dots \dots \left(2 - \frac{997}{999}\right)$$

a) 5/999

c) 5/3

b) 1001/999

d) 1001/3

$$\frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7} \dots \dots \times \frac{1001}{999} = \frac{1001}{3}$$

15. निम्न किसके बराबर है -

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3}$$

a) 15 $\frac{2}{3}$

c) 15 $\frac{1}{3}$

b) 14 $\frac{2}{3}$

d) 14 $\frac{1}{3}$

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3}$$

$$= (2 + 3 + 4 + 5) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 14 + \frac{2+1+3+4}{6} = 14 + \frac{10}{6} = 14 + \frac{5}{3} = 14 + 1\frac{2}{3}$$

$$= 15\frac{2}{3}$$

$$1\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6} = (?)^2 - 2\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (1 - 1 + 2) \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = ?^2 \Rightarrow ?^2 = 2 + \frac{3}{12} = 2\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow ?^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow ? = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$3\frac{6}{7} - 6\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} = ?$$

$$? = 3\frac{6}{7} - 6\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} = (3 - 6 + 5) \left(\frac{6}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 + \frac{78 - 21 + 28}{84} = 22\frac{29}{84}$$

अपवर्त्य (Multiple) : जो संख्याएं किसी संख्या (x) से पूरी-पूरी विभाजित हो जाए, जो संख्याओं को x का अपवर्त्य कहते हैं। जैसे - 3 के अपवर्त्य 3, 6, 9, 12, 15 हैं।

समावर्त्य (Common Multiple) : जो संख्याएं किन्हीं दो या दो से अधिक संख्याओं (x,y,z.....) को पूर्ण विभाजित कर दे। तो इन विभाजित संख्याओं को समावर्त्य कहते हैं।

अपवर्तक (Factor or Divisor) : जिस संख्या से कोई संख्या पूर्णतः विभाजित होती है, उस संख्या को अपवर्तक कहते हैं। जैसे - 6 को क्रमश 1, 2, 3, 6 विभाजित करेंगे, अतः संख्या 6 के 1, 2, 3, 6 अपवर्तक होंगे।

समापवर्तक (Common Factor or Common Divisor) : जो संख्याएँ किन्हीं अन्य दो या दो से अधिक संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करती हैं। तो विभाजक संख्याओं को समापवर्तक कहते हैं। जैसे - 12 और 30 के 1, 2, 3, 6 समापवर्तक हैं।

लघुतम समापवर्त्य (Least Common Multiple) : ल०स० वह सबसे छोटी संख्या है, जो दी हुयी संख्याओं से पूर्णतः विभाजित होती है। जैसे - 2, 3 का ल०स० 6 है। लेकिन समापवर्त्य 6, 12, 24 आदि।

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor or Common Divisor) -
म०स० वह सबसे बड़ी संख्या है, जो दी हुयी संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करती है। अर्थात् म०स० उन संख्याओं का सबसे बड़ा समावर्तक है। जैसे - 18, 30, 24 के समावर्तक 1, 2, 3, 6 है। अतः 18, 30, 24 का म०स० 6 होगा।

गुणनखण्ड विधि से ल०स० व म०स० ज्ञात करना :

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$\text{म०स०} = 2 \times 3 \text{ (जो सभी में कॉमन हो)} = 6$$

$$\text{ल०स०} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \text{ (सभी अधिकतम बार अंक)} = 360$$

भाग विधि - प्रथम

18, 24, 30 का ल० स०				18, 24, 30 का म० स०			
2	18	24	30	2	18	24	30
2	9	12	15	3	9	12	15
3	9	6	15		3	4	5
	3	2	5				
ल०स० = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 360$				म०स० = $2 \times 3 = 6$			

भाग विधि - द्वितीय

इस विधि में म०स० ज्ञात करने के लिए बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग देते हैं, और जो शेषफल आये उससे प्रथम भाजक को भाग देते हैं, फिर जो शेषफल आये उससे द्वितीय भाजक को यही प्रक्रिया तब तक होती है। जब तक कि शेषफल शून्य न आ जाए। जैसे - 299, 1196 का म०स०

$$437 \overline{) 5865} \quad (13$$

$$\underline{5681}$$

$$184 \overline{) 437} \quad (2$$

$$\underline{368}$$

$$69 \overline{) 184} \quad (2$$

$$\underline{138}$$

$$46 \overline{) 69} \quad (1$$

$$\underline{46}$$

$$\text{म०स०} = 23 \overline{) 46} \quad (2$$

$$\underline{46}$$

$$0 \text{ शेष}$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल

वह छोटी-छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो a, b, c से पूर्णतः विभाज्य हो।

अभीष्ट संख्या = a, b, c का ल०स०

वह छोटी से छोटी संख्या कौन-सी है, जो 24, 38, 15 से पूर्णतः विभाज्य हो

अभीष्ट संख्या = 24, 38, 15 का ल०स० = $2 \times 3 \times 4 \times 19 \times 5 = 2280$

2	24, 38, 15
3	12, 19, 15
	4, 19, 5

किसी कॉलेज में आठवीं कक्षा के छात्रों की 6, 8, 12 या 16 की पंक्तियाँ इस प्रकार बनायी जाती हैं जिससे कोई भी छात्र नहीं छूटता है, तो उस कक्षा में छात्रों की कुल न्यूनतम संख्या है -

अभीष्ट संख्या = 6, 8, 12, 16 का ल०स० = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$

2	6, 8, 12, 16
2	2, 4, 6, 8
2	1, 2, 3, 4
	1, 1, 3, 2

वह सबसे छोटी या लघुत्तम संख्या जो a, b, c से विभाजित होने पर हर बार x शेष दे।

अभीष्ट संख्या = a, b, c का ल०स० + x शेष

वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी है, जिसे यदि 25, 40, 60 से विभाजित किया जाए, शेषफल हर बार 7 आता है -

अभीष्ट संख्या = 25, 40, 60 का ल०स० + 7 = $600 + 7 = 607$

वह सबसे छोटी या लघुत्तम संख्या जो a, b, c से विभाजित होने पर क्रमशः x, y, z शेष दे।

अभीष्ट संख्या = a, b, c का ल०स० - (a - x) या (b - y) या (c - z)

वह लघुत्तम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 24 और 36 से विभाजित करने पर शेषफल क्रमशः 14 और 26 होंगे।

अभीष्ट संख्या = 24, 36 का ल०स० - (24 - 14) = $72 - 10 = 62$

चार अंको की वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है, जिसे यदि 3, 5, 7, 9 से विभाजित किया जाए, तो शेषफल क्रमशः 1, 3, 5, 7 रह जाए ?

3, 5, 7, 9 का ल०स० = 315	315) 9999 (31
चार अंक की सबसे बड़ी संख्या	<u>945</u>
315 से पूर्णतः विभाजित	549
= $9999 - 234 = 9765$	<u>315</u>
अभीष्ट संख्या = $9765 - (9 - 7)$	234 शेष
= $9765 - 2 = 9763$	

वह बड़ी से बड़ी संख्या जो a, b, c को पूर्णतः विभाजित करें,

अभीष्ट संख्या = a, b, c का म०स०

वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिसका 522, 1276 और 1624 में पूरा - पूरा भाग चला जाए -

अभीष्ट संख्या = 522, 1276, 1624 का म०स० = **58**

उस सबसे लंबे फीते की लम्बाई कितनी होगी, जो 7मी०, 3मी० 85 सेमी० तथा 12मी० 95सेमी० को ठीक-ठीक नाप सके -

अभीष्ट लम्बाई = 700cm, 385cm, 1295cm का म०स० = **35cm**

$$\begin{array}{r} 385 \) \ 700 \ (\ 1 \\ \underline{385} \\ 315 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \) \ 1295 \ (\ 3 \\ \underline{105} \\ 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{315} \\ 315 \) \ 385 \ (\ 1 \\ \underline{315} \\ 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{245} \\ 35 \) \ 1295 \ (\ 3 \\ \underline{105} \\ 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{245} \\ 70 \) \ 315 \ (\ 4 \\ \underline{280} \\ 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{0} \\ 35 \) \ 70 \ (\ 2 \\ \underline{70} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{280} \\ 35 \) \ 70 \ (\ 2 \\ \underline{70} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{70} \\ 35 \) \ 70 \ (\ 2 \\ \underline{70} \\ 0 \end{array}$$

$2^3, 3^2$ तथा 15 का म०स० एवं ल०स० ज्ञात कीजिए -

$$\text{म०स०} = \text{सभी में कॉमन} = \mathbf{1}$$

$$\text{ल०स०} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{360}$$

वह सबसे बड़ी संख्या जो a, b, c को विभाजित करने के पर क्रमशः x, y, z शेषफल देती है, तो अभीष्ट संख्या = (a - x), (b - y), (c - z) का म०स०

वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है, जो 411, 684, 821 को विभाजित करने के फलस्वरूप क्रमशः 3, 4, 5 शेष छोड़ती है।

$$\begin{aligned} \text{अभीष्ट संख्या} &= (411 - 3), (684 - 4), (821 - 5) \text{ का म०स०} \\ &= 408, 680, 816 \text{ का म०स०} = \mathbf{136} \end{aligned}$$

वह सबसे बड़ी संख्या जिससे a, b, c को विभाजित करने पर शेषफल, प्रत्येक स्थिति में एकसमान आए, तो

$$\text{अभीष्ट संख्या} = (b - a), (c - b), (c - a) \text{ का म०स०}$$

63, 87 और 123 को कौन-सी बड़ी से बड़ी संख्या से विभाजित किया जाए कि प्रत्येक दशा में समान शेष बचे -

$$\begin{aligned} \text{अभीष्ट संख्या} &= (87 - 63), (123 - 87), (123 - 63) \text{ H.C.F.} \\ &= 24, 36, 60 \text{ H.C.F.} = \mathbf{12} \end{aligned}$$

$$\text{भिन्नों का ल०स०} = \frac{\text{अंशों का ल०स०}}{\text{हरो का म०स०}} \qquad \text{भिन्नों का म०स०} = \frac{\text{अंशों का म०स०}}{\text{हरो का ल०स०}}$$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$ का ल०स० व म०स० ज्ञात कीजिए -

$$\text{अभीष्ट ल०स०} = \frac{1,3,5,7,9 \text{ का ल०स०}}{2,4,6,8,10 \text{ का म०स०}} = \frac{\mathbf{945}}{\mathbf{2}}$$

$$\text{अभीष्ट म०स०} = \frac{1,3,5,7,9 \text{ का म०स०}}{2,4,6,8,10 \text{ का ल०स०}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{120}}$$

$$\text{संख्याओं का गुणनफल} = \text{म०स०} \times \text{ल०स०}$$

दो संख्याओं का म०स० 96 है और उनका ल०स० 1296 है। यदि उनमें एक संख्या 864 हो, तो दूसरी कितनी है -

$$\text{दूसरी संख्या} \times 864 = 96 \times 1296 \Rightarrow \text{दूसरी संख्या} = \mathbf{144}$$

पाँच घंटियाँ एक साथ बजना आरंभ होकर, क्रमशः 3, 6, 9, 12 तथ 15 सेकंडों के अंतराल पर बजती रहती है। तो 36 मिनटों में वे एक साथ कितनी बार बजेगी

एकसाथ बजने का समय अन्तराल = 3, 6, 9, 12, 15 सेकण्ड का ल०स०
= 180 सेकण्ड = 3 मिनट

36मिनटों में एकसाथ बजती = $36/3 + 1$ (एकसाथ बजके शुरु हुई) = **13 बार**

किन्हीं दो संख्याओं का म०स० 12 और ल०स० 924 हो तो ऐसी संख्याओं के कुल कितने जोड़े होंगे -

$$12a \times 12b = 12 \times 924 \Rightarrow a \times b = 77 \Rightarrow a, b = (1, 77) \text{ या } (7, 11)$$

अभीष्ट जोड़े = **2**

एक किसान के पास 945 गायें और 2475 भेड़ें हैं। वह उनके रेवड़ बनाता है, गायों और भेड़ों को अलग-अलग रख कर। यदि वे रेवड़ यथासंभव बड़े हैं तो हर रेवड़ में पशुओं की अधिकतम संख्या और इस उद्देश्य के लिए अपेक्षित रेवड़ों की कुल संख्या क्रमशः है -

रेवड़ में पशुओं की अधिकतम संख्या = 945 व 2475 का म०स० = **45**

$$\text{अभीष्ट रेवड़ों की कुल संख्या} = \frac{945}{45} + \frac{2475}{45}$$

$$= 21 + 55 = \mathbf{76}$$

3	945, 2475
3	315, 825
5	105, 275
	21, 55

दो संख्याएँ 3 : 4 के अनुपात में हैं। उनके म०स० तथा ल०स० का गुणनफल 2028 है। संख्याओं का योगफल होगा -

$$3a \times 4a = 2028 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$$

$$3a + 4a = 7a = 7 \times 13 = 91$$

दो संख्याएँ 3 : 4 के अनुपात में हैं। यदि उनका ल०स० 240 हो तो दोनों में से छोटी संख्या होगी -

$$\text{संख्याएँ } 3a, 4a \quad \text{ल०स०} = 3 \times 4 \times a \Rightarrow 12a = 240 \Rightarrow a = 20$$

$$3a = 3 \times 20 = \mathbf{60}$$

दो संख्याएँ 5 : 6 के अनुपात में हैं। यदि उनका महत्तम समापवर्तक 4 है, तो उनका लघुत्तम समापवर्तक होगा :

$$5a, 6a \quad \text{म०स०}(a) = 4, \quad \text{ल०स०} = 5 \times 6 \times a = 30 \times 4 = \mathbf{120}$$

वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका 1050, 1250 और 1650 में भाग देने पर क्रमशः 43, 31, 7 शेष बचे -

$$? = (1050 - 43), (1250 - 31), (1650 - 7) \text{ H.C.F.}$$

$$? = 1007, 1219, 1643 \text{ H.C.F.} = \mathbf{53}$$

$a^2b^4c^6, b^3c^8a^4$ तथा $a^8b^6c^2$ का महत्तम समापवर्तक है -

$$\text{H.C.F.} = \mathbf{a^2b^3c^2}$$

किसी व्यापारी को 35 मी., 42 मी., और 63 मी. लंबे लकड़ी के 3 तख्तों में से बड़े से बड़े बराबर माप के कितने तखते मिल सकते हैं -

बराबर माप के बड़े से बड़े तखते की माप = 35, 42, 63 का म.स. = 7 मी०

$$\text{तखतों की कुल संख्या} = \frac{35}{7} + \frac{42}{7} + \frac{63}{7} = 5 + 6 + 9 = \mathbf{20}$$

[5] वर्ग-वर्गमूल तथा घन-घनमूल [SQUARE-ROOT&CUBE-ROOT]

वर्ग – किसी संख्या (n) का उसी संख्या (n) से गुणा करने पर जो गुणनफल उस संख्या का वर्ग n^2 कहलाता है। जैसे – $4 \times 4 = 16$ तथा $8 \times 8 = 64$

वर्गमूल – किसी संख्या के गुणनफल में उस संख्या को वर्गमूल कहते हैं, जैसे – 36 वर्गमूल 6 तथा 144 का वर्गमूल $12 \times 12 = 12$

वर्ग करने के नियम –

Rule 1 – दो अंको संख्या ab का वर्ग = $a^2/2ab/b^2$

$$24^2 = 2^2/2 \times 2 \times 4/4^2 = 4/16/16 = 576$$

Rule- 2 यदि किसी संख्या का अंतिम अंक 5 है, तो उस संख्या का वर्ग

$$a5^2 = a \times (a + 1)/25$$

$$75^2 = 7 \times 8/25 = 5625, \quad 95^2 = 9025$$

Rule- 3 यदि कोई संख्या 1 से बनी है, जैसे – 1, 11, 111, 1111

$$1^2 = 1, 11^2 = 121, 111^2 = 12321$$

$$(11 \dots \dots n \text{ बार})^2 = 123 \dots \dots n \dots \dots 321$$

Rule-4 यदि कोई संख्या 9 से बनी है, जैसे- 9, 99, 999 आदि तो

$$(99 \dots 9)^2 = 99 \dots 800 \dots 1$$

$$9^2 = 81, 99^2 = 9801, 999^2 = 998001$$

Rule-5 किसी संख्या का वर्ग करने पर उसका इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6, 9 हो सकता है। लेकिन किसी संख्या के वर्ग का इकाई अंक 2, 3, 7, 8 नहीं हो सकता है।

वर्गमूल निकालने के नियम –

Rule 1 – भाग विधि द्वारा – किसी भी संख्या का वर्गमूल इस विधि से निकाल सकते हैं, चाहे वह पूर्णवर्ग हो, या न हो। जैसे – 145 का वर्गमूल

	13.11
1	1 <u>72. 00 00</u>
+1	1
23	072
+3	069
261	00300
+1	261
2621	03900
+1	2621

इस विधि में सबसे पहले संख्या के पीछे यानि दायीं ओर से जोड़ें बनाये और भाग की तरह हल करें तथा जिस संख्या से भाग दे उसे उसी में जोड़ कर नया भाजक बनाये।

Rule 2: यह विधि पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल के लिए है, इस विधि से कुछ ही सेकण्ड में उस संख्या का वर्गमूल निकल आता है।

जैसे- 1369 का वर्गमूल

$$\sqrt{1369} = (13) (69) = (3) (3 \text{ or } 7) = 37$$

$$\because 13 > 3 \times 4$$

$$\sqrt{15376} = (153) (76) = (12)(4 \text{ or } 6) = 124$$

$$4 < 6 \therefore 153 < 12 \times 13$$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है, कि $ab.....xy$ का वर्गमूल = $(ab.....) (xy)$
 $= (ab..... \geq p \text{ का वर्ग}) (r \text{ या } s)$ जहाँ $r < s$

यदि $ab..... \geq p \times (p+1)$ तो वर्गमूल = ps

यदि $ab..... \leq p \times (p+1)$ तो वर्गमूल = pr

घन – किसी संख्या को तीन बार आपस में गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल उस संख्या का घन कहलाता है, जैसे-

$$5 \text{ का घन} = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = \mathbf{125}$$

घनमूल – गुणनफल में जिस संख्या का तीन बार गुणन होता है, उस संख्या को गुणनफल संख्या का घनमूल कहते हैं, जैसे-

$$216 \text{ का घनमूल} = \sqrt[3]{216} = (6 \times 6 \times 6)^{1/3} = \mathbf{6}$$

घनमूल निकालने की संक्षिप्त विधि – यह विधि केवल पूर्ण घन संख्याओं के घनमूल निकालने के लिए है।

सबसे पहले किसी संख्या को दो भागों में बांटे और पहली संख्या का निकटवर्ती घनमूल लिखें तथा दूसरी संख्या दायी ओर के तीन के इकाई अंक के अनुसार जिसका संख्या के घन में यह इकाई अंक 0 से 9 तक में कोई लिखे। जैसे –

$$17576 \text{ का घनमूल} = (17) (576) = (2) (6) = 26$$

$$357911 \text{ का घनमूल} = (357) (911) = (7) (1) = 71$$

संख्या	वर्ग	घन	संख्या	वर्ग	घन
1	1	1	11	121	1331
2	4	8	12	144	1728
3	9	27	13	169	2197
4	16	64	14	196	2744
5	25	125	15	225	3375
6	36	216	16	256	4096
7	49	343	17	289	4913
8	64	512	18	324	5832
9	81	729	19	361	6859
10	100	1000	20	400	8000

विभिन्न टाइप के सवालो का तकनीकी हल

0.64 , 0.0625, 0.000484 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

दशमलव के बाद जितने अंक होते हैं, उसके आधे (1/2) अंक वर्गमूल में दशमलव के बाद रह जाते हैं।

$$0.64 \text{ का वर्गमूल} = 0.8$$

$$\sqrt{0.64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = 0.8$$

$$\sqrt{0.0625} = 0.25$$

$$\sqrt{0.000484} = 0.022$$

0.064, 0.000512, 0.001331 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

दशमलव के बाद जितने अंक होते हैं
उसके एक तिहाई (1/3) अंक घनमूल
में दशमलव के बाद हो जाते हैं।

$$0.064 \text{ का घनमूल} = 0.4$$

$$0.000512 \text{ " " } = 0.08$$

$$0.001331 \text{ " " } = 0.11$$

यदि 729 का वर्गमूल 27 हो तो $\sqrt{7.29} + \sqrt{0.0729} + \sqrt{0.000729}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\sqrt{7.29} + \sqrt{0.0729} + \sqrt{0.000729} = 2.7 + 0.27 + 0.027$$

$$= \mathbf{2.997}$$

यदि 729 का घनमूल 9 हो तो $\sqrt{0.729} + \sqrt{0.000729} + \sqrt{0.000000729}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\sqrt{0.729} + \sqrt{0.000729} + \sqrt{0.000000729} = 0.9 + 0.09 + 0.009$$

$$= \mathbf{0.999}$$

यदि $\sqrt{\frac{169}{x}} = \frac{13}{5}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, } \frac{169}{x} = \frac{169}{25} \Rightarrow x = \mathbf{25}$$

यदि $\sqrt[3]{\frac{125}{x}} = \frac{5}{3}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{दोनों पक्षों का घन करने पर, } \frac{125}{x} = \frac{125}{27} \Rightarrow x = \mathbf{27}$$

2000 में कौन-सी छोटी-छोटी से संख्या जोड़े कि प्राप्त योगफल पूर्ण वर्ग बन जाए -

4	2000	अतः 2000 में छोटी - छोटी संख्या 25 जोड़े तो 2025 संख्या 45 का वर्ग हो जाएगी।
4	16	
85	400	
5	425	
	-25	

वह छोटी से छोटी संख्या जिसे 63520 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो,

2	63520	अतः 16 अधिक बचते हैं, तो 16 घटाये जाये तो बची संख्या 252 का वर्ग होगी।
2	4	
45	235	
5	225	
502	1020	
2	1004	
	+16	

वह कौन सी छोटी से छोटी संख्या हैं जिससे 980 को गुणा करने पर यह पूर्ण वर्ग बन जाए :

$$980 = 49 \times 2 \times 2 \times 5 \quad \text{यहाँ पूर्ण वर्ग बनने के लिए 5 का जोड़ा नहीं बन रहा, अतः 5 का गुणा करेंगे।}$$

वह कौन सी छोटी से छोटी संख्या हैं जिससे 980 को भागा करने पर यह पूर्ण वर्ग बन जाए :

980 = 49 × 2 × 2 × 5 यहाँ 5 का जोड़ा नहीं बन रहा इसलिए 5 का भाग देकर इस संख्या को कम कर देंगे जो पूर्ण वर्ग होगी।

अतः अभीष्ट संख्या **5** है।

एक माली 17956 पेड़ लगाना चाहता है तथा उन्हें इस तरह से लगाना चाहता है कि वहाँ उतनी ही पंक्तियाँ हो जितनी एक पंक्ति में पेड़ों की संख्या है। एक पंक्ति में पेड़ों की संख्या कितनी होगी ?

जब पंक्ति व प्रति पंक्ति में पेड़ों की संख्या समान हैं, तो दोनों का गुणनफल ही कुल पेड़ के बराबर होगा एवं यहाँ यदि हम कुल पेड़ की संख्या 17956 का वर्गमूल बराबर दो भागों में विभाजित करेंगे।

अतः अभीष्ट संख्या = 17956 का वर्गमूल = **134**

60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में प्रत्येक लड़के ने उतने ही रुपये दिये जितनी लड़कियों की संख्या थी तथा प्रत्येक लड़की ने उतनी ही रुपये दिये, जितनी लड़कों की संख्या थी। यदि कुल इकट्ठा किया गया धन 1600रु. हैं, तो कक्षा में लड़कों की संख्या कितनी है ?

लड़कें लड़कियाँ

$$B \times (60 - B) + (60 - B) \times B = 1600\text{रु.}$$

$$2 \times B \times (60 - B) = 1600 \Rightarrow B \times (60 - B) = 800 = 20 \times 40 \text{ then } \mathbf{B = 20}$$

यदि किसी संख्या और उसके वर्ग का योग 182 हैं, तो वह संख्या क्या है -

$$x + x^2 = 182 \Rightarrow x \times (1 + x) = 13 \times 14 \text{ then } \mathbf{x = 13}$$

$$\sqrt{21 + \sqrt[3]{59 + \sqrt{16 + \sqrt[3]{722 + \sqrt{49}}}}} \text{ का मान है -}$$

$$\sqrt{21 + \sqrt[3]{59 + \sqrt{16 + \sqrt[3]{722 + \sqrt{49}}}}} \\ \sqrt{21 + 4} = 5 \quad \sqrt[3]{59 + 5} = 4 \quad \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \sqrt[3]{722 + 7} = 9$$

एक संख्या के घन में (150)² जोड़ने पर उत्तर 77372 आता है। वह संख्या है ?

$$x^3 + 150^2 = 77372 \Rightarrow x^3 = 77372 - 22500 = 54872 \\ x^3 = 38^3 \Rightarrow x = \mathbf{38}$$

उन दो क्रमागत सम संख्याओं का योग क्या है, जिनके वर्गों का अन्तर 84 है

$$a^2 - (a - 2)^2 = 84 \Rightarrow a^2 - a^2 - 4 + 4a = 84 \\ 4a = 88 \Rightarrow a = 22 \text{ then sum } 22 + 20 = \mathbf{42}$$

घात या घातांक – राशि a^m में a को आधार तथा m को घात कहते हैं। घात को घातांक भी कहा जाता है।

महत्वपूर्ण सूत्र –

(क) यदि आधार समान है, तो गुणा में घात जुड़ जाती हैं।

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \dots = a^{[m+n+p+ \dots]}$$

जैसे - $5^4 \times 5^4 \times 5^8 = 5^{16}$, $4^7 \cdot 4^5 \cdot 5^4 \cdot 5^3 = 4^9 \cdot 5^7$

(ख) यदि आधार समान हैं, तो भाग में घात घट जाती हैं।

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ जैसे : } y^{23} \div y^{13} = y^{10}$$

(ग) यदि घात के ऊपर घात हो, तो घातों का आपस में गुणा होता है।

$$\left[\left\{ \left(y^a \right)^b \right\}^c \right]^d = y^{a \cdot b \cdot c \cdot d} \text{ जैसे : } \left[\left\{ \left(x^2 \right)^4 \right\}^2 \right]^5 = x^{80}$$

(घ) यदि आधार अलग-अलग हैं व घात समान तो सभी आधार का गुणन हो जाता है व घात समान हो जाती है।

$$(a \cdot b \cdot c \dots)^x = a^x \cdot b^x \cdot c^x \dots \text{ जैसे : } 9^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4 = 135^4$$

(ङ) संख्या को व्युत्क्रम किया जाये तो उस संख्या की घात का चिन्ह बदलता है

$$\left(\frac{a}{b} \right)^m = \left(\frac{b}{a} \right)^{-m} \text{ जैसे - } \left(\frac{5}{3} \right)^{-6} = \left(\frac{3}{5} \right)^6$$

(च) यदि कोई घात बराबर से दूसरी संख्या पर जाती हैं, तो वह व्युत्क्रम हो जाती है।

जैसे - $a^x = b \Rightarrow a = b^{\frac{1}{x}}$ जैसे - $y^{\frac{1}{4}} = 2 \Rightarrow y = 2^4 = 16$

(छ) यदि किसी संख्या की घात शून्य (0) होती है तो उस संख्या का मान 1 होता है। $x^0 = 1$, जैसे : $a^x \cdot a^{-x} = a^0 = 1$

करणी : किसी संख्या का मूल सांकेतिक मान ($\sqrt{\quad}$) करणी हैं।

करणी की विभिन्न घातें होती हैं –

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}, \quad \dots \dots \dots \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

लघुगणक :

$$a^x = m \Rightarrow \log_a m = x \text{ (a आधार पर m का लघुगणक पढ़े)}$$

$$\log_a 1 = 0 \text{ if } a \neq 0$$

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_x b (x^a) = \frac{a}{b}$$

$$\log_x x = 1$$

विभिन्न टाइप के सवालों को हल करने की तकनीकी विधि

$(256)^{0.16} \times (16)^{0.18}$ का मान है -

$$(16^2)^{0.16} \times (16)^{0.18} = 16^{0.32} \times 16^{0.18} = 16^{0.50} = 4^{2 \times 0.5} = 4$$

If $2^{2x+21} = 32^{3x-1}$ then $x = ?$

$$2^{2x+21} = 2^{5(3x-1)} \Rightarrow 2^{2x+21} = 2^{15x-5} \text{ घातों की तुलना करने पर,}$$

$$2x + 21 = 15x - 5 \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow x = 2$$

$$\left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{5^9}} \right]^4 \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{5^9}} \right]^4 = ?$$

$$\left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{5^9}} \right]^4 \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{5^9}} \right]^4 = 5^{9 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times 4} \times 5^{9 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 4} = 5^2 \times 5^2 = 5^4$$

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} \text{ तो } a = n(n+1) \text{ तो}$$

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = n + 1$$

$$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} \text{ तो } a = n(n+1) \text{ तो}$$

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = n$$

$$\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}}} = ?$$

$$42 = 6 \times 7 \text{ धनात्मक इसलिए अभीष्ट उत्तर} = 7$$

$$\sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{42 - \dots}}} = ?$$

$$42 = 6 \times 7 \text{ ऋणात्मक इसलिए अभीष्ट उत्तर} = 6$$

$$\sqrt{x \pm \sqrt{x \pm \sqrt{x \pm \dots}}} \text{ तो } x \neq n(n+1) \text{ तो}$$

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = \frac{\sqrt{1+4x} \pm 1}{2}$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}} = ?$$

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = \frac{\sqrt{1+4x} + 1}{2} = \frac{\sqrt{1+4 \cdot 5} + 1}{2} = \frac{\sqrt{21} + 1}{2}$$

$$= \frac{4.58 + 1}{2} = \frac{5.58}{2} = 2.79$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}} = ?$$

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = \frac{\sqrt{1+4x-1}}{2} = \frac{\sqrt{1+4 \cdot 5-1}}{2} = \frac{\sqrt{21-1}}{2}$$

$$= \frac{4.58-1}{2} = \frac{3.58}{2} = 1.79$$

$$\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} \infty = x$$

$$\sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5 \dots}}} \infty = ?$$

$$\frac{\log x}{\log a} = ?$$

$$? = \frac{\log x}{\log a} = \log_a x$$

$$\log_2 64 = ?$$

$$? = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \log_2 2 = 6$$

$$2 \log \left(\frac{11}{13} \right) + 2 \log \left(\frac{130}{33} \right) - \log \left(\frac{4}{9} \right) = ?$$

$$\begin{aligned} ? &= 2 \log \left(\frac{11}{13} \right) + 2 \log \left(\frac{130}{33} \right) - \log \left(\frac{4}{9} \right) \\ &= 2 \log \left(\frac{11}{13} \times \frac{130}{33} \right) - \log \left(\frac{4}{9} \right) \\ &= 2 \log \left(\frac{10}{3} \right) - \log \left(\frac{4}{9} \right) = \log \left(\frac{100}{9} \right) - \log \left(\frac{4}{9} \right) \\ &= \log \left(\frac{100}{9} \div \frac{4}{9} \right) = \log(25) = \log(5^2) = \mathbf{2 \log 5} \end{aligned}$$

$$\text{If } \log_3 x = -2, \text{ then } x = ?$$

$$\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

यदि $a^x = b^y = c^z$ हो तो $\log_b a = \log_c b$ हो, तो x, y, z में संबन्ध हैं -

$$\begin{aligned} \text{Take Log, } \log a^x &= \log b^y = \log c^z \\ \Rightarrow x \log a &= y \log b = z \log c \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\log a}{\log b} = \frac{y}{x} \quad \& \quad \frac{\log b}{\log c} = \frac{z}{y} \quad \text{या } \log_b a = \frac{y}{x} \quad \& \quad \log_c b = \frac{z}{y}$$

$$\text{We have, } \log_b a = \log_c b \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Rightarrow \mathbf{y^2 = x \cdot z}$$

$$\log 8 + \log \frac{1}{8} = ?$$

$$? = \log 8 + \log \frac{1}{8} = \log \left(8 \times \frac{1}{8} \right) = \log 1 = \mathbf{0}$$

$$[(5\sqrt{7} + \sqrt{7})(4\sqrt{7} + 8\sqrt{7})] - (19)^2 = ?$$

$$? = \sqrt{7}(5+1) \cdot \sqrt{7}(4+8) - 361 = 504 - 361 = \mathbf{143}$$

$$[((3)^2)^6]^4 = 9^?$$

$$[(9)^6]^4 = 9^? \Rightarrow 9^{24} = 9^? \Rightarrow ? = \mathbf{24}$$

सरलीकरण : किसी सवाल को उसके संक्षिप्त रूप में पहुँचाने की प्रक्रिया सरलीकरण कहलाती है, अर्थात किसी सवाल को सरल कर संक्षिप्त परिणाम प्राप्त करना सरलीकरण है।

जब किसी सवाल में जोड़ व घटाना एवं गुणा व भाग एक साथ होते हैं, तो

BODMAS नियम से क्रमशः हम हल करते हैं -

B - Bracket(कोष्ठक) $___ () \{ \} []$ 1st कोष्ठक में

O - Of (का यानि \times) 'का' को पहले तोड़कर

D - Divide (भाग) ता पीछे दो 'भाग'

M - Multiplication (गुणा) 'गुणा' करो,

A - Addition (जोड़) धन जोड़कर,

S - Subtraction(घटाव) ऋण को घटाव

कोष्ठक के अन्दर कोष्ठक में भी क्रमशः सबसे पहले रेखा कोष्ठक $___$, फिर छोटा कोष्ठक $()$, फिर मझला कोष्ठक $\{ \}$, फिर बड़ा कोष्ठक $[]$

नोट : यदि कोष्ठक के अन्दर कोष्ठक आ जायें तो सर्वप्रथम सबसे अन्दर वाले कोष्ठक को हल करते हैं। सबसे बाहर वाला कोष्ठक सबसे अन्त में हल किया जाता है।

सवाल को सरल करने में कुछ महत्वपूर्ण सूत्र का भी प्रयोग करते हैं -

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

यदि $a + b + c = 0$ तब $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

[9 - { 23 - 32 - (71 - 54 - 35) }] को हल कीजिए :

$$[9 - \{ 23 - 32 - (71 - 54 - 35) \}]$$

iiiird iind ist

$$[9 - 9] = 0 \quad \{ -9 + 18 = 9 \} \quad -(-18)$$

18 - [5 - { 6 + 2(7 - 8 - 5) }] को सरल कीजिए :

$$18 - [5 - \{ 6 + 2(7 - 8 - 5) \}]$$

Vth IVth IIIrd IInd Ist

$$18 + 9 = 27 \quad [5 - 14] = -9 \quad \{ 6 + 8 \} = 14 \quad (7 - 3) = 4 \quad 3$$

18 का $\frac{2}{3} + 4 \times 6 \div 3$ को सरल कीजिए :

$$18 \text{ का } \frac{2}{3} + 4 \times 6 \div 3 = 12 + 4 \times 6 \div 3 = 12 + 4 \times 2 = 12 + 8 = 20$$

$[1 - 2(1 - 2)^{-1}]^{-1}$ को सरल कीजिए :

$$\begin{aligned} [1 - 2(1 - 2)^{-1}]^{-1} &= [1 - 2(-1)^{-1}]^{-1} \\ &= \left[1 - 2\left(\frac{1}{-1}\right)\right]^{-1} = [1 - 2 \times -1]^{-1} = [1 + 2]^{-1} \\ &= 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\frac{[(0.8)^2 - (0.17)^2]}{[(0.08)^2 - (0.017)^2]}$ का मान है -

$$\begin{aligned} \frac{[(0.8)^2 - (0.17)^2]}{[(0.08)^2 - (0.017)^2]} &= \frac{100[(0.8)^2 - (0.17)^2]}{100[(0.08)^2 - (0.017)^2]} \\ &= \frac{100[(0.8)^2 - (0.17)^2]}{[(0.8)^2 - (0.17)^2]} = 100 \end{aligned}$$

$\frac{[(0.96)^3 - (0.1)^3]}{[(0.96)^2 + 0.096 + (0.1)^2]}$ का मान है -

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ से} \\ \frac{[(0.96)^3 - (0.1)^3]}{[(0.96)^2 + 0.096 + (0.1)^2]} &= 0.96 - 0.1 = 1.06 \end{aligned}$$

$(3 + 2\sqrt{2})^{-3} + (3 - 2\sqrt{2})^{-3}$ का मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(3 - 2\sqrt{2})^3} &= \frac{[2 \times 27 + 6 \times 3 \times 8]}{[(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})]^3} \\ &= \frac{54 + 144}{(9 - 8)^3} = \frac{198}{1} = 198 \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = 2a^3 + 6ab^2$$

$$[(0.111)^3 + (0.222)^3 - (0.333)^3 + (0.333)^2(0.222)]^3$$

$$[(0.111)^3 + (0.222)^3 - (0.333)^3 + 3(0.111)(0.333)(0.222)]^3$$

यदि $a + b + c = 0$ तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

if $0.111 + 0.222 - 0.333 = 0$ then Ans. = 0

$$13.141 + 31.417 - 27.118 = ?$$

$$? = 17.440$$

$\frac{3}{8}, \frac{1}{12}$ का कौन-सा भाग है -

$$\frac{1}{12}x = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$712 + 92 \times 0.50 - 83 = ?$$

$$712 + 92 \times 0.50 - 83 = ?$$

$$? = 712 + 46 - 83 = 675$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = ?$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = ?$$

$$? = 4^2 = 16$$

अनुपात : सजातीय राशियों के सम्बन्ध को उनका अनुपात कहते हैं। जैसे : 3 : 2 अर्थात् अनुपात में सभी राशि समान रूप से परिवर्तित होती हैं।

अनुपात के प्रकार :

अनुलोम अनुपात : दो या दो अधिक राशियों में एक राशि परिवर्तित होने से दूसरी राशि में भी वही परिवर्तन होता है, जैसे - कार्य = बल × विस्थापन में बल को बढ़ाने पर कार्य भी बढ़ता है, तथा बल घटाने पर कार्य भी घटता है, अतः यहाँ कार्य तथा बल में अनुलोम अनुपात है। अर्थात्

कार्य \propto बल या कार्य \propto विस्थापन

प्रतिलोम अनुपात या व्युत्क्रमानुपात - दो राशि में परिवर्तन विपरीत होता है।

जैसे- बल = कार्य / विस्थापन अर्थात् बल $\propto 1 /$ विस्थापन

मिश्रित अनुपात - दो या दो से अधिक अनुपातों के प्रथम पदों का गुणनफल और द्वितीय पदों के गुणनफल में अनुपात होगा। जैसे - 1 : 2, 3 : 4, 4 : 5 का मिश्रित अनुपात = $(1 \times 3 \times 4) : (2 \times 4 \times 5) = 12 : 40 = 3 : 10$

वर्गानुपात - किसी अनुपात के प्रत्येक पद के वर्ग करने पर बना अनुपात। जैसे - 2 : 3 का वर्गानुपात 4 : 9 होगा।

आधानुपात - किसी अनुपात के प्रत्येक पद के आधा करने पर बना अनुपात। जैसे - 8 : 10 का आधानुपात 4 : 5 होगा।

वर्गमूलानुपात - a : b का वर्गमूलानुपात $\sqrt{a} : \sqrt{b}$

घनानुपात - a : b का घनानुपात $a^3 : b^3$

घनमूलानुपात - a : b का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$

समानुपात - यदि दो अनुपात समान हैं, तो उनके चारों पद समानुपात होते हैं।
a : b = c : d या a : b :: c : d या $a/b = c/d$ या $a \times d = b \times c$

विततानुपात (Continue Proportion) - a : b : c या a : b :: b : c या $b^2 = a \times c$

विभिन्न टाइप के प्रश्नों को हल करने की विधि :

4 : 5 :: 3 : ? में ? का मान ज्ञात कीजिए।

$$3:5 :: 6:? \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{?} \Rightarrow ? = \frac{6 \times 5}{3} = 10$$

यदि 4 : a : 9 समानुपात में हैं, तो a मान ज्ञात कीजिए।

$$4:a:9 \Rightarrow 4:a = a:9 \Rightarrow a^2 = 36 = 6^2 \Rightarrow a = 6$$

यदि a : b = 2 : 3 तो (4a - 3b) : (4a + 3b) का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} a:b=2:3 \text{ then } a=2, b=3 \text{ रखें,} \\ \frac{4a-3b}{4a+3b} = \frac{4 \times 2 - 3 \times 3}{4 \times 2 + 3 \times 3} = \frac{8-9}{8+9} = \frac{-1}{17} \end{aligned}$$

यदि (5a+3b) : (4a+7b) = 3 : 4 हो, तो a : b कितना होगा ?

$$\begin{aligned} \frac{5a+3b}{4a+7b} = \frac{3}{4} \Rightarrow 20a+12b = 12a+21b \Rightarrow 8a = 9b \\ \frac{a}{b} = \frac{9}{8} \Rightarrow a:b = 9:8 \end{aligned}$$

19 : 17 के प्रत्येक पद में से क्या घटाया जाय कि अनुपात 7 : 5 हो जाए ?

$$\begin{aligned} \frac{19-x}{17-x} = \frac{7}{5} \Rightarrow 95-5x = 119-7x \\ 2x = 119-95 = 24 \Rightarrow x = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} 19 & \diagdown & 7 \\ & x & \\ 17 & \diagup & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7x-5x=2x = x \\ 119-95=24=12 \end{array}$$

4, 10, 12, 24 में प्रत्येक में कौन-सी संख्या जोड़ी जानी चाहिए, जिससे परिणामी संख्याएँ समानुपातिक हों ? विकल्प- 9, 3, 6, 4

समानुपाती तब, $4+a / 10+a = 12+a / 24+a$ Option put value 4 then

$$8/14=16/28 \Rightarrow 4/7=4/7 \text{ अतः उत्तर} = 4$$

दो संख्याएँ 9 : 16 के अनुपात में हैं, यदि प्रत्येक संख्या में 15 की वृद्धि कर दी जाए, तो अनुपात 2 : 3 हो जाता है। संख्याएँ हैं -

$$9x \quad 2 \quad 27x \sim 32x = 15(2 \sim 3) \Rightarrow 5x=15, x=3$$

$$16x \quad 3 \quad \text{संख्याएँ } 9x=27, 16x=48$$

तीन संख्याएँ 1 : 2 : 3 के अनुपात में हैं, उनमें, प्रत्येक में 5 जोड़ने पर नई संख्याएँ 2 : 3 : 4 के अनुपात में हो जाती हैं। तदनुसार, वे संख्याएँ हैं -

क) 1, 2, 3 ख) 5, 10, 15 ग) 15, 30, 45 घ) 10, 20, 30

विकल्प से माना संख्याएँ 5, 10, 15 हैं, तब 5 जोड़ने पर, 10, 15, 20 अर्थात् अनुपात 2 : 3 : 4 होगा।

एक फैक्टरी में नियुक्त पुरुषों, स्त्रियों तथा लड़कों की संख्या का अनुपात 5 : 7 : 10 है। यदि उसमें कुल कामगारों की संख्या 660 हो तो उनमें पुरुषों, स्त्रियों तथा लड़कों की संख्या कितनी हैं ?

पुरुष	स्त्रियां	लड़के	कुल = 660
5a	7a	10a	22a = 660 \Rightarrow a = 30
	150	210	300

यदि $x : y = a : b$ तथा $y : z = m : n$ तो $x : y : z = ma : mb : nb$

यदि $p : q : r = a : b : c$ तथा $r : s = m : n$ तो $p : q : r : s = ma : mb : mc : nc$

यदि $a : b = 3 : 4$ तथा $b : c = 6 : 5$ हो, तो $a : b : c$ बताइये।

$$a : b : c$$

$$3 : 4 \rightarrow 4$$

$$6 \leftarrow 6 : 5$$

$$18 : 24 : 20 = 9 : 12 : 10$$

या उपर्युक्त फॉर्मूला से,

$$a : b : c = 6 \times 3 : 6 \times 4 : 5 \times 4 = 18 : 24 : 20 = 9 : 12 : 10$$

यदि $a : b = 2 : 5$, $b : c = 1 : 3$, $c : d = 2 : 3$ तो $a : b : c : d$ बताइये।

$$a : b : c : d$$

$$2 : 5 \rightarrow 5 \quad 5$$

$$1 \leftarrow 1 : 3 \rightarrow 3$$

$$2 \quad 2 \leftarrow 2 : 3$$

$$2 : 10 : 20 : 45$$

यदि $aP = bQ = cR$ तो $P : Q : R = 1/a : 1/b : 1/c$

यदि $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ हो तो $P : Q : R = a : b : c$

यदि $2A=3B=4C$ तब $A : B : C$ बताइये।

$$2A=3B=4C \Rightarrow \frac{A}{3 \times 2} = \frac{B}{4} = \frac{C}{3} \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{4} = \frac{C}{3} \text{ then,}$$

$$A : B : C = 6 : 4 : 3$$

यदि $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4}$ तब $A : B : C$ बताइये।

$$A : B : C = 2 : 3 : 4$$

यदि $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ हो तो $\frac{4a+3b-c}{b}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$a : b : c = 2 : 3 : 5$ अब, $a=2, b=3, c=5$ रखने पर,

$$\frac{4a + 3b - c}{b} = \frac{8 + 9 - 5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

स्कूल के थैले और जूते के दाम $7 : 5$ के अनुपात में हैं। स्कूल के थैले का दाम से 200 रुपये अधिक हैं। तो जूते का दाम हैं -

Bag	7a	$2a = 200\text{रु.} \Rightarrow a = 100\text{रु.}$
Shoe	5a	$5a = 5 \times 100\text{रु.} = 500\text{रुपये}$

एक आदमी 7 बेटों, 3 बेटियों और 5 भतीजों के बीच बाँटने के लिए 12,600 रुपये की राशि छोड़ता है, यदि हर बेटे को हर भतीजे से तीन गुना राशि मिले और हर बेटे को हर भतीजे से सात गुना राशि मिले, तो हर बेटे का हिस्सा है

	संख्या	राशि	कुल राशि
बेटे	7	7a	49a
बेटियां	3	3a	9a
भतीजे	5	a	5a

कुल राशि = $63a = 12600\text{रु.}$
 $a = 200\text{रु.}$
 हर बेटे का हिस्सा = $3a = 600\text{रुपये}$

एक व्यक्ति ने अपने पेन अपने चार मित्रों A, B, C, D में $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ के अनुपात में बाँटे, तदनुसार, उस व्यक्ति के पास पेनों की न्यूनतम संख्या कितनी होनी चाहिए ?

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \frac{60}{3} : \frac{60}{4} : \frac{60}{5} : \frac{60}{6} = 20 : 15 : 12 : 10$$

अतः पेनों की कुल न्यूनतम संख्या = $20+15+12+10=57$

पूरे विश्व में भूमि और जल का अनुपात $1 : 2$ हैं, यदि उत्तरी गोलार्द्ध में यह अनुपात $2 : 3$ है, तो दक्षिणी गोलार्द्ध में भूमि और जल का अनुपात कितना है

	भूमि	जल	कुल
पूरा विश्व	1 (10)	2 (20)	3 (30)
द० गोलार्द्ध	2 (6)	3 (9)	5 (15)
उ० गोलार्द्ध	(4)	(11)	10 होगी अर्थात 3 है, तो 30)

उ० गोलार्द्ध 4 : 11

एक व्यक्ति के पास एक रुपये, पाँच रुपये, तथा दस रुपये के नोटों के रूप में कुल धनराशि 640 रुपये हैं। प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या समान है, कुल मिलाकर उसके पास कितने नोट हैं ?

	1Rs	5Rs	10Rs	Total Money = 640रु.
Coins	1	1	1	$16R=640$ or $R = 40\text{रु.}$
Money	1	5	10	

एक रुपये की धनराशि 1 अनुपात = 40रु. तो नोट भी 40 तो सभी प्रकार के

$$\text{कुल नोट} = 40 + 40 + 40 = 120$$

225रु. की राशि एक रुपये, 50 पैसे और 25 पैसे के सिक्कों के रूप में हैं, इनकी संख्याएँ उसी क्रम में 8 : 5 : 3 के अनुपात में हैं। एक रुपये के सिक्कों की संख्या है -

1Rs	50Paise	25Paise	Total Money = 225रु.
Coins	8	: 5	: 3
	43a = 225रु.		
Money	800	: 250	: 75 (Paise)
	a = 5रु.		
Money	32a	: 10a	: 3a
एक रु. की कुल राशि = 32 × 5रु. = 160रु. में एक रुपये के सिक्कों की संख्या 160			

एक बॉक्स में एक रुपये, 50पैसे, 25 पैसे के 280 सिक्के प्रत्येक प्रकार के सिक्कों के मूल्य 8 : 4 : 3 के अनुपात में हैं। तो 50 पैसे के सिक्कों की संख्या

1रु.	50पैसे	25 पैसे	कुल सिक्के = 280
मूल्य	8	: 4	: 3
सिक्के	8	: 4×2	: 3×4
सिक्के	2	: 2	: 3
			7 R = 280 या R = 40
			50 पैसे के सिक्के = 2R
			= 80 सिक्के

एक थैले में तीन प्रकार के एक रुपये वाले, 50 पैसे वाले तथा 25 पैसे वाले सिक्के हैं, जिनकी कुल संख्या 175 हैं। यदि प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की कुल मूल्य बराबर हो, तो थैले के सिक्कों का कुल मिलाकर मूल्य है -

1Rs	50Ps	25Ps	Total Coins = 175
Money	1	: 1	: 1
	7 a = 175 or a = 25		
Coins	1	: 2	: 4
	Total Money = 25+25+25= 75Rs		

बचत = आय - व्यय

एक परिवार की आय एवं व्यय का अनुपात 10 : 7 है। यदि उस परिवार का व्यय 10, 500 रुपये हो, तो उसकी बचत कितनी है ?

आय	10a	व्यय = 10500रु.
व्यय	7a	7a = 10500रु. or a = 1500रु.
बचत	3a	3a = 3 × 1500रु. = 4500रु.

राम तथा श्याम की आय का अनुपात 2 : 3 है और उनके व्यय का अनुपात 1 : 2 यदि उनमें से प्रत्येक की बचत 24,000 हो, तो राम की आय ज्ञात कीजिए

	राम	श्याम	बचत बराबर हैं, तब
आय	2a	3a	2a - b = 3a - 2b या a : b = 1 : 1
व्यय	1b	2b	राम की बचत = 1 अनुपात = 24,000रु.
बचत (2a-b)	(3a-2b)		राम की आय = 2a = 2×1 अनुपात = 48,000रु.

राम व श्याम की साप्ताहिक आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 हैं, यदि दोनों व्यक्ति हर सप्ताह 200रु. बचा लेते हैं, तो उन दोनों की साप्ताहिक आय का योग कितना होगा ?

	राम	श्याम	बचत बराबर हैं, तब
आय	9a	7a	9a - 4b = 7a - 3b या 2a = b या a : b = 1 : 2
व्यय	4b	3b	बचत = (9a - 4b) = 1 अनुपात = 200रु.
बचत (9a-4b)	(7a-3b)		कुल आय = 16a = 16×1 अनुपात = 3200रु.

राम और श्याम के वेतन का योग 2100 रूपये हैं। राम अपने वेतन का 80% खर्च करता है और श्याम 70% खर्च करता है, यदि उनकी बचत में 4 : 3 का अनुपात है, तो राम का वेतन कितना है ?

राम	श्याम	दिया है, बचत का अनुपात 4 : 3 तब,
आय	100x	100y
खर्च	80x	70y
बचत	20x	30y
		20x/30y=4/3 या x:y=2:1
		वेतन का योग(100x+100y)=2100रु.
		300अनुपात=2100रु. या 1 अनुपात = 7रु.
		राम की आय 100x=200अनुपात = 1400रु.

राम , श्याम और घनश्याम की आय का अनुपात 3 : 4 : 7 व उनके खर्च का अनुपात 4 : 5 : 3 हैं , अगर राम अपनी आय का $14\frac{2}{7}\%$ बचाता है, तो उनकी बचत का अनुपात ज्ञात करो।

राम	श्याम	घनश्याम	$3a \times \frac{100}{7} \% = 3a - 4b$
आय	3a	4a	7a
खर्च	4b	5b	3b
बचत	(3a-4b)	(4a-5b)	(7a-3b)
			$3a/7=(3a-4b)$ या $3a=21a-28b$
			$18a=28b$ या $a : b=14 : 9$
			$\therefore a=14, b=9$ रखने पर,
			बचत (42-36) : (56-45) : (98-27) = 6 : 11 : 71

महेश एवं अजय की वर्तमान आयु का अनुपात क्रमशः 3 : 2 है। 8 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 11 : 8 हो जाएगा। महेश के पुत्र की वर्तमान आयु क्या होगी यदि उसकी वर्तमान आयु अजय के वर्तमान आयु की आधी हैं -

M	A	
Present	3a	2a
+ 8 After 11	: 8	
		$24a - 22a = 8(11-8)$
		$a = 12$
		$? = 2a/2 = a = 12$

प्रतिशत का अर्थ – प्रति सैकड़ा। अर्थात् किसी संख्या को 100 बराबर भागों में बांटने पर उसका 1 प्रतिशत 1 भाग होता है।

$$\% = 1/100$$

भिन्न	प्रतिशत मान	भिन्न	प्रतिशत मान
1	100%	1/3	$33\frac{1}{3}\%$ 33.33%
1/2	50%	1/6	$16\frac{2}{3}\%$ 16.66%
1/4	25%	1/7	$14\frac{2}{7}\%$ 14.28%
1/5	20%	1/8	$12\frac{1}{2}\%$ 12.5%
1/10	10%	1/9	$11\frac{1}{9}\%$ 11.11%
1/20	5%	1/11	$9\frac{1}{11}\%$ 9.09%
1/25	4%	1/12	$8\frac{1}{3}\%$ 8.33%
1/40	2.5% या $2\frac{1}{2}\%$	1/13	$7\frac{9}{13}\%$ 7.69%
1/30	3.33% या $3\frac{1}{3}\%$	1/14	$7\frac{1}{7}\%$ 7.14%
1/24	4.16% या $4\frac{1}{6}\%$	1/15	$6\frac{2}{3}\%$ 6.66%
3/2	150%	1/16	$6\frac{1}{4}\%$ 6.25%

किसी संख्या a को जिस संख्या b से प्रतिशत बताना है, तो a, b का

$$\% = \frac{a}{b} \times 100\% \text{ हैं।}$$

$$\text{कमी/वृद्धि \%} = \frac{\text{कमी या वृद्धि}}{\text{प्रारंभिक मान}} \times 100\%$$

1/4 को प्रतिशत में बदले -

$$\text{अभीष्ट प्रतिशत} = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$$

10000 का $33\frac{1}{3}\%$ का 0.15% हैं -

$$\begin{aligned} \text{अभीष्ट संख्या} &= 10000 \times \frac{100}{3} \times \frac{1}{100} \times \frac{0.15}{100} \\ &= 100 \times 0.05 = 5 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

x का 30%, 72 है, x का मान हैं -

$$x \times \frac{30}{100} = 72 \Rightarrow x = 240$$

किसी विद्यालय में कुल विद्यार्थियों का 70% लड़कियाँ हैं, लड़कों की संख्या 510 हैं, तो विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या हैं -

$$\begin{aligned} \text{Girls} &= 70\% \text{ \& } \text{Boys} = 30\% \quad 30\% = 510 \text{ या } 1\% = 17 \\ \text{Total Student} &= 100\% = 1700 \end{aligned}$$

एक विद्यार्थी ने किसी संख्या को $\frac{5}{3}$ स्थान पर इसे $\frac{3}{5}$ से गुणा कर दिया तो परिकलन में त्रुटि प्रतिशत कितनी हैं -

माना संख्या	गलत गुणन	सही गुणन	त्रुटि
15	$\times \frac{3}{5} = 9$	$\times \frac{5}{3} = 25$	$(9 \sim 25) = 16$
			त्रुटि % = $\frac{16}{25} \times 100\% = 64\%$

65 ग्राम 3 किग्रा० के कितने प्रतिशत के बराबर हैं -

$$\text{अभीष्ट \%} = \frac{65 \text{ gm}}{3000 \text{ gm}} \times 100\% = \frac{65}{30}\% = \frac{13}{6}\% = 2\frac{1}{6}\%$$

एक व्यक्ति को 20% वेतनवृत्ति प्राप्त होने पर उसका वेतन 24,000 रु. हो गया है, तो उसका पूर्व वेतन कितना था ?

प्रा० वेतन	100%	120% = 24,000रु. या 1%=200रु.
वेतनवृत्ति	+ 20%	प्रा० वेतन = 100% = 20000रु.
		नया वेतन 120%

एक डिब्बे में 100 नीले गोले, 50 लाल गोले और 50 काले गोले हैं। 25% नीले गोले और 50% लाल गोले निकाल लिए गए तब काले गोलों का प्रतिशत

नीले	लाल	काले	कुल शेष गोले = 75+25+50=150
प्रा० 100	50	50	शेष काले गोले = 50
कटौती ↓ -25%	↓ -50%		काले गोले % = $\frac{50}{150} \times 100\% = 33\frac{1}{3}\%$
	शेष 75	25	50

$\frac{2}{3}$ भिन्न, $\frac{1}{3}$ की कितने प्रतिशत हैं -

$$\text{अभीष्ट \%} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \times 100\% = \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} \times 100\% = 200\%$$

यदि किसी भिन्न के अंश में 20% की वृद्धि और उसके हर में 5% कमी कर दी जाए, तो नई भिन्न का मान $\frac{5}{2}$ हो जाता है -

$$\begin{aligned} \text{माना प्रा० भिन्न} &= \frac{100a}{100b} \\ \frac{120a}{95b} &= \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{95}{48} \text{ or } \frac{100a}{100b} = \frac{95}{48} \end{aligned}$$

एक आदमी ने अपनी पूँजी का $\frac{1}{3}$ भाग 7% पर $\frac{1}{4}$ भाग 8% पर और शेष 10% पर निवेश किया यदि उसकी वार्षिक आय 561 हैं, तो पूँजी हैं -

पूँजी	पहला	दूसरा	शेष	$102a\% = 561रु.$
12a	$\frac{1}{3} = 4a$	$\frac{1}{4} = 3a$	5a	$102a = 56100रु. \text{ या } a = 550रु.$
निवेश 7%	8%	10%		पूँजी = 12a = 12 × 550रु.
आय 28a%	24a%	50a%		= 6600रु.

एक वस्तु का दाम 20% घटाया गया, प्रारम्भिक दाम में लाने के लिए नये दाम को कितना प्रतिशत बढ़ाया जाएगा -

प्रा० दाम	कमी	नया दाम	प्रा० दाम के लिए 80a को 100a बढ़ाना,
100a	-20%	80a	अभीष्ट वृद्धि = $\frac{20a}{80a} \times 100\% = 25\%$

एक वस्तु की कीमत 10% घटा दी जाती हैं, इसे मूल कीमत पर लाने के लिए नई कीमत में कितनी वृद्धि की जायेगी -

प्रा० दाम	कमी	नया दाम	100a के लिए 90a में वृद्धि 10a की ,
-----------	-----	---------	-------------------------------------

$$100a \quad -10\% \quad 90a \quad \text{अभीष्ट वृद्धि} = \frac{10a}{90a} \times 100\% = 11\frac{1}{9}\%$$

यदि चाय के मूल्य में 20% की बढ़ोत्तरी हो जाए, तो उसकी खपत में कितने प्रतिशत की कमी की जाए ताकि चाय पर होने वाले व्यय में कोई वृद्धि न हो -

$$\begin{array}{ccc} \text{प्रा० व्यय} & +20\% & \text{नया व्यय} \\ 100a & & 120a \end{array} \quad \text{कमी} = 120a - 100a = 20a$$

$$\text{कमी}\% = \frac{20a}{120a} \times 100\% = 16\frac{2}{3}\%$$

यदि श्याम का वेतन राम के वेतन से 30% अधिक हैं, तो राम का वेतन श्याम के वेतन से कितने प्रतिशत कम हैं -

$$\begin{array}{ccc} \text{राम} & 30\% & \text{श्याम} \\ 100a & & 130a \end{array} \quad \text{राम का वेतन श्याम से कम} = 30a$$

$$\text{कमी}\% = \frac{30a}{130a} \times 100\% = 23\frac{1}{13}\%$$

एक टॉकीज की सीटों की संख्या में 10% की वृद्धि की गयी तथा इसके टिकट के कीमत में भी 10% की वृद्धि की गयी तो टॉकीज की आय में कुल कितनी प्रतिशत वृद्धि हुई -

$$\begin{array}{ccc} \text{प्रा० आय} & +10\%, +10\% & \text{नयी आय} \\ 100 & & 121 \end{array} \quad 100 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = 121$$

$$\text{वृद्धि} = 121 - 100 = 21\%$$

राम वेतन पहले 20% बढ़ाया गया व फिर 20% घटाया गया तो राम के वेतन में कितनी प्रतिशत वृद्धि / कमी हुई -

$$\text{प्रा० वेतन} \quad +20\%, -20\% \quad \text{नया वेतन}$$

$$100 \quad 100 \times \frac{120}{100} \times \frac{80}{120} = 96$$

$$96 - 100 = (-4) \text{ अर्थात } 4\% \text{ की कमी (क्योंकि 100 पर हुई)}$$

एक व्यापारी एक तराजू के माध्यम से वस्तुओं को खरीदते समय 10% का घोटाला करता है, तथा बेचते समय भी 10% का घोटाला करता है, तो उसका लाभ प्रतिशत है -

$$\begin{array}{ccc} \text{प्रा० दाम} & +10\%, +10\% & \text{नया दाम} \\ 100 & & 121 \end{array} \quad 100 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = 121$$

$$121 - 100 = +21 \text{ अर्थात } 21\% \text{ लाभ}$$

एक सिनेमा घर की सीटों में 25% वृद्धि की गयी हैं, टिकट के मूल्य में भी 10% की वृद्धि की गयी तो कुल आय में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई -

$$\begin{array}{ccc} \text{प्रा० आय} & +25\%, +10\% & \text{नयी आय} \\ 100 & & 137.5 \end{array} \quad 100 \times \frac{125}{100} \times \frac{110}{100} = 137.5$$

$$137.5 - 100 = +37.5 \text{ अर्थात वृद्धि} = 37.5\%$$

चीनी की कीमत में $33\frac{1}{3}\%$ वृद्धि होने की वजह से किसी परिवार की खपत 20% घट जाती है, खर्च में कितने % का बदलाव हुआ -

$$\begin{array}{ccc} \text{प्रा० व्यय} & +33\frac{1}{3}\%, -20\% & \text{नया व्यय} \\ 100 & & 106\frac{2}{3} \end{array} \quad 100 \times \frac{400}{300} \times \frac{80}{100} = \frac{320}{3} = 106\frac{2}{3}$$

$$106\frac{2}{3} - 100 = +6\frac{2}{3} \text{ अर्थात } 6\frac{2}{3}\% \text{ व्यय में वृद्धि हुई}$$

किसी सिनेमा टिकट का मूल्य $16\frac{2}{3}\%$ बढ़ने से उसकी बिक्री 20% घट जाती है, तो उसके राजस्व में कितना बदलाव होगा -

$$\begin{aligned} \text{प्रा० राजस्व} &+ \frac{50}{3}\%, - 20\% \quad \text{नया राजस्व} \\ 100 & \quad \quad \quad 100 \times \frac{350}{300} \times \frac{80}{100} = \frac{280}{3} = 93\frac{1}{3} \\ 93\frac{1}{3} - 100 &= -6\frac{2}{3} \text{ अर्थात राजस्व में कमी} = 6\frac{2}{3}\% \end{aligned}$$

यदि किसी संख्या का $9\frac{1}{9}\%$ इसी संख्या में जोड़ दिया जाए तो संख्या 18,120 बन जाती है, तो संख्या क्या है -

$$\begin{aligned} \text{प्रा० संख्या} &+ \frac{100}{9}\% = 1/9 \quad \text{नयी संख्या} \\ 100a & \quad \quad \quad 100a \times (1 + 1/9) = 18,120 \\ \Rightarrow 100a \times \frac{10}{9} &= 18,120 \text{ or } 100a = \mathbf{16,308} \end{aligned}$$

एक आदमी 20 मिनट में 40 लाइन टाइप कर सकता है और प्रत्येक लाइन में 8% जगह रिक्त छोड़ देता है, कितने समय में वह 40 लाइन के 23 पेज टाइप करेगा अगर इस बार पहले से 25% अधिक जगह रिक्त छोड़ दे -

$$\begin{aligned} 1\text{st क्षमता} &= 2\text{nd क्षमता} \quad (\text{क्षमता} = \text{कार्य/समय}) \\ \frac{40\text{लाइन}}{20\text{मिनट}} \times \frac{92}{100} &= \frac{40 \times 23\text{लाइन}}{t} \times \frac{90}{100} \quad (\text{दुबारा रिक्त जगह} = 8\% \times \frac{125}{100} = 10\%) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{20\text{मिनट}} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{t} \times \frac{90}{1} \Rightarrow t = \mathbf{450\text{मिनट}}$$

किसी परीक्षा में पास होने के लिए अधिकतम अंको के 36% अंक लाना आवश्यक है, एक विद्यार्थी ने 113 अंक प्राप्त किये तथा वह 85 अंकों से फेल हो गया। तो परीक्षा में अधिकतम अंक हैं -

$$\begin{array}{ll} \text{अधिकतम अंक} & \text{न्यूनतम उत्तीर्ण अंक} \\ 100\% & 36\% = 113 + 85 \text{ या } 4\% = 22 \text{ then } 100\% = \mathbf{550} \end{array}$$

एक प्रत्याशी किसी परीक्षा में 20% अंक प्राप्त करके 30 अंकों से फेल हो जाता है, परन्तु अन्य प्रत्याशी 32% अंक प्राप्त करके पास होने वाले अंकों से 42 अंक अधिक प्राप्त करता है, तब पास होने के लिए अंको का प्रतिशत है -

$$\begin{array}{ll} \text{अधिकतम अंक} & \text{न्यूनतम उत्तीर्ण अंक} \\ 100\% & 20\% + 30 \text{ या } 32\% - 42 \\ 20\% + 30 = 32\% - 42 & \Rightarrow 12\% = 72 \Rightarrow 1\% = 6 \\ \text{अभीष्ट अंक} & = 20 \times 6 + 30 = 120 + 30 = \mathbf{150\text{अंक}} \end{array}$$

दो विद्यार्थी किसी परीक्षा में बैठे इनमें से एक ने दूसरे से 9 अंक अधिक प्राप्त किए तथा उसके प्राप्तांक दोनों के अंकों के योग के 56% के बराबर थे, उनके द्वारा प्राप्त गए अंक हैं -

$$\begin{array}{lll} \text{पहला छात्र} & \text{दूसरा छात्र} & a+9 = (a+a+9) \times \frac{56}{100} \\ a & a+9 & 100a+900 = 112a + 504 \\ \mathbf{33} & \mathbf{42} & 12a = 396 \text{ या } \mathbf{a = 33} \end{array}$$

किसी छात्र ने विज्ञान के विषयों में 300 में से 32% अंक अर्जित किए, वह भाषा के 200 अंक वाले प्रश्नपत्र में कितने अंक अर्जित ताकि उसके कुल मिलाकर 46% अंक हो जाए ?

	विषय	पूर्णांक	प्राप्तांक
	विज्ञान	300	32%= 96
	भाषा	200	m
			(230 - 96 = 134)
	कुल	500	46%= 230

*दोनों में पास = कुल - (एक विषय में फेल+दूसरे विषय में फेल - दोनों में फेल)

*दोनों में फेल = कुल - (एक विषय में पास+दूसरे विषय में पास - दोनों में पास)

किसी परीक्षा में 52% विद्यार्थी हिन्दी तथा 42% अंग्रेजी में फेल हुए। यदि 17% विद्यार्थी इन दोनों विषयों में फेल हुए हो, तो कितने प्रतिशत विद्यार्थी दोनों विषयों में पास हुए -

कुल विद्यार्थी = 100	कुल फेल = (52+42) - 17 = 77
कुल पास = 100 - 77 = 33%	(∵ 17 विद्यार्थी दोनों विषयों में हैं)

एक कक्षा के दो सेक्शन में 20 और 30 विद्यार्थी हैं, इन सेक्शनों में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की प्रतिशत क्रमागत 80% और 60% हैं, पूरी कक्षा में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की प्रतिशतता हैं -

	1st	20	80%	16
	2nd	30	60%	18
			?	$?\% = \frac{34}{50} \times 100\% = \mathbf{68\%}$
	Total	50	?	34

किसी परीक्षा में इंग्लिश में 70% और गणित में 80% अभ्यर्थी पास होते हैं, और 10% दोनों में फेल होते हैं, यदि 144 अभ्यर्थी दोनों विषयों में पास होते हैं, तब अभ्यर्थियों की कुल संख्या हैं -

$$10\% = [100 - (70+80 - \text{दोनों में पास } p)\% \text{ या } p\% = 60\%$$

$$60\% = 144 \Rightarrow 10\% = 24 \text{ अर्थात कुल } 100\% = \mathbf{240}$$

एक सर्वे में 30% लोगों के पास सेलुलर टेलीफोन पाया गया और 75% लोगों के पास पर्सनल कंप्यूटर पाया गया यदि 25% लोगों के पास सेलुलर टेलीफोन और पर्सनल कंप्यूटर दोनों हैं। तो लोगों का वह प्रतिशत जिनके पास सेलुलर टेलीफोन या पर्सनल कंप्यूटर या दोनों हो -

$$\text{अभीष्ट प्रतिशत} = (30+75)\% - 25\%(\text{Common}) = \mathbf{80\%}$$

किसी वस्तु का मूल्य प्रति वर्ष 5% की दर से कम हो जाता है, यदि इसका वर्तमान मूल्य 4,11,540रु. हो तो 3 वर्ष पहले इसका मूल्य कितना था -

$$\text{प्रा० मूल्य (P)} \quad 3 \text{ वर्ष बाद} \quad \text{वर्तमान मूल्य } 4,11,540\text{रु.}$$

$$P \times \left(\frac{95}{100}\right) \times \left(\frac{95}{100}\right) \times \left(\frac{95}{100}\right) = 4,11,540\text{रु.}$$

$$P \times 19 \times 19 \times 19 = 4,11,540 \times 20 \times 20 \times 20 \Rightarrow \mathbf{P = 4,80,000\text{रु.}}$$

किसी गाँव की आबादी 20% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही है, यदि 2 वर्ष पूर्व उसकी आबादी 10000 थी तो वर्तमान आबादी हैं -

प्रा० आबादी	2 वर्ष बाद	वर्तमान आबादी
10000	+20%	$10000 \times \frac{120}{100} \times \frac{120}{100} = \mathbf{14400}$

एक फैक्टरी में, साइकिलों का निर्माण 2 वर्ष में 40,000 से बढ़कर 48,400 हो गया। प्रतिवर्ष वृद्धि की दर क्या है -

$$48,400 = 40,000 \times \left(\frac{100+R}{100}\right) \left(\frac{100+R}{100}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{100+R}{100}\right) \left(\frac{100+R}{100}\right) = \frac{12100}{10000} = \left(\frac{110}{100}\right) \left(\frac{110}{100}\right)$$

अतः **R = 10%**

Method : 2nd

प्रा० 40000 100 दो वर्ष 10^2 दर % = $\frac{11-10}{10} \times 100\%$

अंतिम 48400 121 11^2 दर % = **10%**

दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में एक उम्मीदवार कुल वैध वोटों का 55% प्राप्त करता है, 20% वोट अवैध थे, यदि वोटों की कुल संख्या 7500 थी। तो दूसरे उम्मीदवार के पक्ष में कितने वैध मत पड़े -

कुल वोट	वैध	पहले को 55% तो दूसरे को 45%
?	$7500 \times \frac{80}{100} \times \frac{45}{100}$	$= 75 \times 4 \times 9 = 2700$ Vote

किसी चुनाव में 8% मतदाताओं ने अपने मत नहीं डालें, इस चुनाव में केवल दो ही प्रत्याशी थे, जीतने वाले प्रत्याशी ने कुल मतों के 48% मत प्राप्त कर 1100 मतों से चुनाव में दूसरे प्रत्याशी को हरा दिया, चुनाव में कुल मत थे -

कुल मत 100a विजेता = 48a अविजेता = 100a - 8a - 48a = 44a

$48a - 44a = 1100 \Rightarrow 4a = 1100 \Rightarrow a = 275 \rightarrow 100a = 27500$

एक व्यक्ति ने अपनी आय का 20% अपने बड़े पुत्र को दिया तथा शेष का 30% अपने छोटे पुत्र को दे दिया। शेष बची हुई राशि का 10% उसने ट्रस्ट को दे दिया और इस प्रकार उसके पास 10,080 रु. बचे। उसकी आय थी -

शेष (100%-20%) शेष (100%-30%) शेष (100%-10%)

$$a \times \frac{80}{100} \times \frac{70}{100} \times \frac{90}{100} = 10,080 \text{ रु.} \Rightarrow a = 20,000 \text{ रु.}$$

किशन अपने वेतन का 30% भोजन पर व्यय करता है और 3% एक धर्मार्थ ट्रस्ट में दान देता है। वह इन दोनों मदों पर 2310 रु. व्यय करता है, तो उसका महीने का वेतन है -

कुल वेतन 100% कुल व्यय (30%+3%)=33%

$33\% = 2310 \text{ रु.} \Rightarrow 1\% = 70 \text{ रु.} \Rightarrow 100\% = 7000 \text{ रु.}$

एक व्यक्ति अपनी आय का 75% खर्च करता है, उसकी आय 20% बढ़ जाती है और वह अपना खर्च 10% बढ़ा लेता है, उसकी बचत कितनी बढ़ेगी -

आय	100a	+20%	120a	बचत वृद्धि = 37.5a - 25a = 12.5a
खर्च	75a	+10%	82.5a	वृद्धि% = $\frac{12.5a}{25a} \times 100\% = 50\%$
बचत	25a		37.5a	

तीन व्यक्ति A, B, C जिनके वेतनों को जोड़ 72,000 रु. हैं, क्रमशः अपने वेतन का 80%, 85%, 75% खर्च कर देते हैं, यदि उन तीनों की बचतों का अनुपात 8 : 9 : 20 हो, तो सभी के वेतन बताइये -

A	B	C	$100a+100b+100c=72,000\text{रु.}$
आय 100a	100b	100c	$100(2+3+5)=72,000\text{रु.}$
व्यय 80a	85b	75c	$1 = 72\text{रु.}$
बचत 20a	15b	25c	
बचत 4a	: 3b	: 5c	$= 8 : 9 : 20$ then a=2, b=3, c=5
			$100a=200 \times 72\text{रु.} = \mathbf{14400\text{रु.}}$
			$100b=300 \times 72\text{रु.} = \mathbf{21600\text{रु.}}$
			$100c=500 \times 72\text{रु.} = \mathbf{36000\text{रु.}}$

एक विक्रेता को कुल बिक्री का 9% कमीशन मिलता है, और 25,000 से ज्यादा की बिक्री पर 1% बोनस मिलता है। अगर उसकी कुल आय 6750रु. हो तो कुल बिक्री ज्ञात कीजिए -

बिक्री 25,000	+25,000	25,000रु. का 1% =250रु.
	9%	(9+1)%=10%
कमीशन 25,000रु. तक 9% यानि एक प्रतिशत कम और सभी बिक्री पर 10%		
10% के हिसाब से कुल कमीशन 10% = 6750रु.+250रु.=7000रु.		
तब बिक्री 100% = 70,000रु.		

चीनी की कीमतों में 20% की वृद्धि हुई, खपत में कितने किग्रा. की कमी की जाए की खर्च केवल 5% ही बढ़े जबकि प्रारंभ में वह 440 किग्रा० खपत करता हो -

100	105	कमी% = $\frac{15}{120} \times 100\% = \frac{25}{2}\%$
120	-15	कमी : प्रा० खर्च = 25/2 : 100 = 1 : 8
		8 यूनिट = 440किग्रा० या 1 यूनिट = 55किग्रा०

आलू की कीमत में 30% कमी वजह से एक परिवार 32 किलो आलू अधिक खरीदता है, ताकि खर्च केवल 16% ही कम हो ताजा खपत ज्ञात करो -

100	84	अधिक % = $\frac{14}{70} \times 100\% = 20\%$
70		$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1(\text{खपत में वृद्धि})}{5(\text{प्रा०खपत})}$
1यूनिट = 32किग्रा० व ताजा खपत 6 यूनिट = 6×32किग्रा० = 192किग्रा०		

चीनी के मूल्य में 20% कमी होने पर खरीदार 160रु. में 8 किग्रा अधिक चीनी खरीद सकता है, तो ज्ञात कीजिए -

(क) चीनी की प्रारंभिक मात्रा (ख) प्रा० मूल्य (ग) नया मूल्य

प्रा०मूल्य 20%=1/5	नया मूल्य	$\frac{160}{4a} - \frac{160}{5a} = 8\text{kg}$
5a	4a	$160 \times \frac{1}{20a} = 8 \Rightarrow a = 1\text{Rs/kg}$
	5Rs/kg	4Rs/Kg
	प्रा० मात्रा = 160रु./5रु.प्रति किग्रा = 32किग्रा	

अंडों के मूल्य में 20% की वृद्धि होने से 20रु. में 2अंडे कम मिलने लगे। अंडों का वर्तमान प्रति दर्जन भाव है -

प्रा० भाव 20%=1/5	नया भाव	$\frac{20}{5a} - \frac{20}{6a} = 2 \Rightarrow \frac{20\text{रु.}}{30a} = 2\text{अंडे}$
5a	6a	$\Rightarrow a = 1\text{रु.}/3\text{अंडे}$
		$6a = 6 \times 1\text{रु.}/3\text{अंडे} = 2\text{रु. प्रति 12अंडे} = \mathbf{24\text{रु.प्रति दर्जन}}$

एक कंपनी 10,000रु. तक की बिक्री पर अपने सेल्समैन को 5% कमीशन देती है, और 10,000 से ऊपर 4% कमीशन देती है। अगर सेल्समैन अपना

कमीशन लेने के बाद कंपनी में 31,100रु. जमा करवाता हैं। तो कुल बिक्री ज्ञात करो यदि कंपनी सारी बिक्री पर 4% कमीशन दे तो कंपनी को 10,000रु. पर 1% का फायदा होगा -

10,000रु. का 1% = 100रु. अब यदि 4% कमीशन सभी पर कर दे तो सभी कमीशन में 10,000रु. का 1% कम करना होगा तब,
4% = 31,100 - 100 = 31000 \Rightarrow 1% = 7750 या 100% = **775000रु.**

गन्ने कीमतों में 2रु. प्रति दर्जन की कमी की वजह से एक व्यक्ति 288रु. में 1 दर्जन गन्ने ज्यादा खरीदता हैं। वास्तविक मूल्य ज्ञात कीजिए :

वा0 भाव= a $\frac{288}{a-2} - \frac{288}{a} = 1 \Rightarrow \frac{288}{(a-2)a} = 1$
नया भाव=(a-2) $a \times (a-2) = 16 \times 18$ then **a = 16रु.प्रति दर्जन**

नमक और पानी के एक घोल में 10% नमक हैं। यदि 30 लीटर पानी वाष्प हो जाता हैं, तो नमक 15% बन जाता है। प्रारंभिक घोल की मात्रा ज्ञात कीजिए

घोल	नमक	पानी	$\frac{90a-30}{10a} = \frac{85b}{15b} \Rightarrow \frac{9a-3}{a} = \frac{17}{3}$
प्रा० 100a	10a	90a	$\Rightarrow 27a - 9 = 17a \Rightarrow 10a = 9$ then
नया 100b	15b	85b	प्रा० घोल 100a = 90लीटर

80% बोरिक अम्ल वाले 100 मिली पानी के घोल में कितना पानी और मिलाया जाए कि घोल में बोरिक अम्ल 50% हो जाए -

अम्ल 80%	80ml	$\frac{80ml}{20ml+x} = \frac{50\%}{50\%} \Rightarrow 80ml = 20ml + x$
पानी 20%	20ml	$\Rightarrow x = 60ml$

40किलो ताजे तरबूज में 96% पानी हैं, कुछ समय बाद इसमें 95% पानी रह जाता हैं। तरबूज की नयी मात्रा क्या हैं ?

मात्रा	छिलका	पानी
ताजे 100a=40kg	4a=1.6kg	96a=38.4kg
नयी 100b	5b=1.6kg	
5b=1.6kg then 100b = 32kg		

405 मीठी चीजें बच्चों में समान रूप से इस तरह बांटी गई थी कि प्रत्येक बच्चे को प्राप्त चीजों की संख्या कुल बच्चों की संख्या का 20% थी। प्रत्येक बच्चे को कितनी चीजें प्राप्त हुई -

माना : कुल बच्चें 100x व प्रत्येक को 20x मिठाईयां मिली। तब
 $20x = \frac{405}{100x} \Rightarrow 100x^2 = 81 \Rightarrow 10x = 9 \Rightarrow 20x = 18$

मूलधन(Principal) – वह धन जिस पर ब्याज लिया जाता है, या किसी को कर्ज दिया जाता है, प्रतीक P

समय (Time) – जितने समय तक कर्ज दिया जाए।

दर(Rate)- कर्ज को निश्चित दर प्रतिशत पर दिया जाता है, प्रकट : R

ब्याज(Interest) – कर्ज के साथ किसी व्यक्ति या बैंक को अतिरिक्त राशि का भुगतान करने पर अतिरिक्त राशि ही ब्याज होती है। प्रकट चिन्ह : I

मिश्रधन (Amount) – ब्याज सहित संपूर्ण राशि। प्रकट : A

$$\text{मिश्रधन (A)} = \text{मूलधन(P)} + \text{ब्याज (I)}$$

साधारण ब्याज(Simple Interest) – किसी कर्ज अर्थात् मूलधन पर निश्चित अवधि में ब्याज की गणना कर ब्याज ली जाए, न कि मूलधन में ब्याज जोड़कर मूलधन को कम या अधिक क्या जाए तो इसप्रकार ब्याज का साधारण ब्याज कहते हैं। प्रकट : S.I.

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{(\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय})}{100}$$

- यदि कोई धन साधारण ब्याज की दर से t वर्ष में n गुना हो जाता है, तो

$$\text{ब्याज की दर } r = \frac{100(n - 1)}{t} \%$$

साधारण ब्याज में समय व दर की गणना –

जब दो तिथियों के बीच साधारण ब्याज निकालना हो तो समय की गणना करने में ब्याज भुगतान करने की तिथि भी शामिल की जाती है, लेकिन उधार देने की

तिथि को समय की गणना में शामिल नहीं करते. अर्थात् पहला दिन छोड़ दिया जाता है.

- ब्याज की गणना करते समय हमेशा दर व समय एक ही इकाई में होने चाहिए; अर्थात् यदि समय वर्ष में है, तो दर भी वार्षिक होनी चाहिए. यदि समय वर्ष छमाही है, तो दर भी छमाही में होनी चाहिए.

दर का समयानुसार परिवर्तन –

समय	दर	वार्षिक दर
t वर्ष	r% छमाही	2r%
t वर्ष	r% त्रिमाही	4r%

समय का दरानुसार परिवर्तन -

दर	समय	वार्षिक समय
r% वार्षिक	t माह	t/12 वर्ष
r% वार्षिक	t छ:माह	t/2 वर्ष
r% वार्षिक	t त्रि माह	t/4 वर्ष
r% छमाही	t त्रिमाह	t/2 छ:माह

- मूलधन को वर्तमान राशि, साधारण ब्याज को शुद्ध बढ़ा व कुल धनराशि को देय ऋण भी मानते हैं।
- यदि किसी धन P को r% वार्षिक ब्याज की दर पर t वर्ष तक उधार दिया गया तो उधार चुकाने हेतु

$$\text{वार्षिक देयराशि} = \frac{200x}{t[200 + r(t - 1)]}$$

विभिन्न टाइप के प्रश्नों का तकनीकी हल :

10,000रुपये की राशि 10% वार्षिक दर से – एक वर्ष का साधारण ब्याज ,दो वर्ष का साधारण ब्याज ,यदि ब्याज की दर 10% छमाही हो, तो 1 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए ।

$10\% = \frac{1}{10}$ वार्षिक	$10\% = \frac{1}{10}$ छमाही
1वर्ष ब्याज (1a) : मूलधन (10a)	1छमाही ब्याज (1a) : मूलधन 10a
मूलधन 10a=10,000Rs	मूलधन 10a=10,000Rs
a=1000Rs	a=1000Rs
1वर्ष का सा0 ब्याज = 1a= 1000Rs	समय =एक वर्ष = दो छमाही
2वर्ष का सा0 ब्याज = 2a= 2000Rs	दो छमाही की ब्याज =2a
	= 2000Rs

यदि किसी धन पर 3 वर्ष के लिए 12.5% की दर से लगा साधारण ब्याज मूलधन से 2500 रु0 कम हैं तो मूलधन , साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए ।

12.5%	मूलधन = 8a=4000रु.
1 : 8	साधारण ब्याज = 3a
1वर्ष ब्याज [1a] : मूलधन[8a]	= 3×500रु.
3 वर्ष का ब्याज = 1a×3=3a	= 1500रु.
अंतर(8 – 3)a=2500रु	
5a = 2500रु.	
a = 500रु.	

यदि किसी धन पर 4 वर्ष के लिए लगा साधारण ब्याज मूलधन से 5500 रु0 कम हैं। तथा दर $6\frac{2}{3}\%$ हो तो मूलधन , साधारण ब्याज ज्ञात करें ।

$6\frac{2}{3}\% = \frac{20}{3}\%$	मूलधन = 15a=7500रु.
1 : 15	साधारण ब्याज = 4a
1वर्ष ब्याज [1a] : मूलधन[15a]	= 4×500रु.
4 वर्ष का ब्याज = 1a×4=4a	= 2000रु.
अंतर(15 – 4)a=5500रु	
11a = 5500रु. ⇒ a = 500रु.	

एक आदमी 18,800रुपये 11 वर्ष के लिए निवेश करता हैं, यदि ब्याज की दर पहले 3 वर्ष के लिए 6%, अगले 4 वर्ष के लिए 7% और आगे शेष समय के लिए 7.5% वार्षिक है, तो साधारण ब्याज ज्ञात करो –

6% × 3Year = 18%	$S.I. = \frac{18800 \times 78}{100}$ = 14288रु.
7% × 4Year =28%	
7.5%×4Year =30%	
कुल दर R = 76%	

किसी पुस्तक का नकद मूल्य 60 रुपये है । लेकिन वही पुस्तक 20 रु0 नकद व अगले 6 महीने तक 8रु0 की 6 समान किस्तों में भी खरीद सकते है । दर ज्ञात करो ।

नकद की राशि = 60 – 20 = 40	पहला 40 किस्त - 8
किस्त की राशि = 8 × 6 = 48	दूसरा 32 " - 8
ब्याज = 48 – 40 = 8	तीसरा 24 " - 8
$\frac{120 \times R \times 1\text{माह}}{100} = 8$	चौथा 16 " - 8
$R = \frac{20}{3}$ प्रतिमाह = $\frac{20 \times 12}{3}$ वार्षिक	पांचवा 8 " - 8
R = 80% वार्षिक	छटवां 0 " - 8
	कुल मूलधन = 0 से 40 = 120

एक कलम का नकद मूल्य 10 ₹ हैं, परंतु इसे 1₹/महीने की 11 महीने तक समान किस्तों में भी खरीद सकते हैं, तो वार्षिक दर ज्ञात कीजिए -

$$\begin{aligned} \text{ब्याज} &= \text{किस्तों की राशि} - \text{नकद राशि} = 11 - 10 = 1 \text{ ₹} \\ \text{किस्त देन के बाद मूलधन क्रमशः} &: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 \\ \text{कुल किस्त मूलधन} &= 10+9+8+7+\dots\dots\dots 1+0= 55\text{₹} \\ \frac{55 \times R \times 1}{100 \times 12} &= 1 \Rightarrow R = 2\frac{9}{11}\% \end{aligned}$$

एक साईकिल 1500 ₹ में खरीदी जा सकती है। परन्तु वही साईकिल 350 ₹ नकद और अगले तीन वर्ष तक 400 ₹ की 3 समान किस्तों में भी खरीदी जा सकती हैं, दर ज्ञात कीजिए -

$$\begin{aligned} \text{ब्याज} &= \text{किस्तों की राशि} - \text{नकद शेष देय राशि} = (400 \times 3) - (1500 - 350) \\ &= 1200 - 1150 = 50\text{₹} \\ \text{किस्त देय के बाद मूलधन क्रमशः} &: 1150, 750, 350 \\ \text{कुल मूलधन} &= 2250 \\ \frac{2250 \times R \times 1}{100} &= 50 \Rightarrow R = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}\% \end{aligned}$$

एक आदमी ने साधारण ब्याज पर बैंक से 8000₹ का कर्ज लिया। तीन वर्ष बाद उसने बैंक को 3000 ₹ दिये तथा 5 वें वर्ष के अन्त में 6020 ₹ देकर लोन चुकता कर दिया। तो दर ज्ञात करो-

$$\begin{aligned} \text{क्रमशः समयानुसार मूलधन} & 8000, 8000, 8000, 5000, 5000 = 34000 \\ \text{S.I.} &= (3000+6020) - 8000 = 9020 - 8000 = 1020 \\ \frac{34000 \times R \times 1}{100} &= 1020 \Rightarrow R = 3\% \end{aligned}$$

एक आदमी ने दो बराबर धन 15% व 20% साधारण ब्याज की दर से उधार दिए। पहले वाला धन दूसरे से 6 महीने पहले चुका दिया गया और उसे प्रत्येक से 3900 ₹ प्राप्त हुए, तो धन बताइये -

<p>R 15% 20%</p> <p>T t (t-1/2)</p> <p>दोनों से समान ₹ मिल रहे हैं तो साधारण ब्याज समान होगा।</p>	$\frac{P \times 15 \times t}{100} = \frac{P \times 20 \times \frac{2t-1}{2}}{100}$ $6t = 4(2t-1)$ $t = 2$ $P + \frac{P \times 15 \times 2}{100} = 3900$ $\Rightarrow P = 3000 \text{ ₹}$
---	--

साधारण ब्याज से कोई धन 4 वर्ष में अपने का 8 गुना हो जाता है, तो 22 गुना धन होने में कितना समय लगेगा ?

<p>4 वर्ष</p> <p>धन वृद्धि (8-1)=7गुना</p>	<p>×3</p> <p>(22-1)=21गुना=7×3</p>
--	------------------------------------

साधारण ब्याज से कोई धन दो वर्ष में 4200 तथा 5 वर्ष में 4800 ₹ बन जाता है। धन व दर ज्ञात कीजिए -

<p>2वर्ष 4200</p> <p>1वर्ष का सा0 ब्याज = 600/3=200</p>	<p>5 वर्ष 4800</p> <p>धन = 4200-400=3800</p>	<p>3 वर्ष का सा0 ब्याज = 4700-4200</p>
$\frac{3800 \times r \times 1}{100} = 200 \Rightarrow R = \frac{100}{19}\% = 5\frac{5}{19}\%$		

साधारण ब्याज से कोई धन 5% की दर से 350 ₹ हो जाता है व 3% की दर 250 ₹ हो जाता है। धन व समय ज्ञात करो -

मिश्रधन	350	250	ब्याज दर अंतर
दर	5%	3%	5%-3%=350-250रु0
मूलधन	(350 - 5×50)=100रु0		2%=100
$\frac{100 \times 5 \times t}{100} = 250 \Rightarrow t = 50$ वर्ष			

एक आदमी 50,000 रुपये एसबीआई, पंजाब बैंक, इलाहाबाद बैंकों में क्रमशः 10%, 15%, 18% की साधारण ब्याज की दर से जमा कराता है और 1 वर्ष में 7300 रुपये ब्याज कमाता है। अगर एसबीआई में निवेश किया गया धन इलाहाबाद बैंक में निवेश किए गए धन का 80% है, तो पंजाब बैंक में कितना निवेश किया गया -

बैंक	इलाहाबाद	एसबीआई	पंजाब
निवेश	100x	80x	(50,000 - 180x)
प्रश्नानुसार कुल साधारण ब्याज			
$\frac{100x \times 18}{100} + \frac{80x \times 10}{100} + \frac{[(50,000 - 180x) \times 15]}{100} = 7300$			
$\Rightarrow 2600x + 7,50,000 - 2700x = 730000$			
$\Rightarrow 100x = 20,000 \Rightarrow x = 200$			
तब पंजाब में निवेश = 50,000 - 180×200=14,000रुपये			

TYPE - VIII

एक आदमी ने तीन स्कीमों में 6 वर्ष, 10वर्ष व 12वर्ष के लिए क्रमशः 10%, 5% व 15% की दर से धन निवेश किया प्रत्येक स्कीम के अंत में उसको बराबर ब्याज प्राप्त हुआ उसके निवेश का अनुपात है -

$$P_1 \times 6 \times 10\% = P_2 \times 10 \times 5\% = P_3 \times 12 \times 15\%$$

$$P_1 \times 6 = P_2 \times 5 = P_3 \times 18$$

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{18} = 15 : 18 : 5$$

6450 रुपये का ऋण 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से कितनी वार्षिक किश्त देकर 4 वर्षों में चुकाया जा सकता है -

$$\text{वार्षिक देयराशि} = \frac{200x}{t[200 + r(t - 1)]}$$

$$= \frac{200 \times 6450}{4[200 + 5 \times 3]} = \frac{50 \times 6450}{215} = 1500 \text{ रु0}$$

यदि 1 रु. 60 वर्ष में सरल ब्याज से 9 रु. बन जाता है, प्रतिवर्ष ब्याज दर क्या होगी -

$$\frac{1 \times 60 \times R}{100} = 9 \Rightarrow R = \frac{90}{60} = 1.5 = 15\%$$

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) : यदि एक निश्चित समय जैसे तिमाही, छमाही, वार्षिक के बाद प्राप्त ब्याज को मूलधन में जोड़ दिया जाता है, इस प्रकार बना मिश्रधन अगले समय (अवधि) के लिए मूलधन बन जाता है, जब तक उधार चुकता नहीं होता इसी प्रक्रिया में प्राप्त ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं। प्रकट : C.I.

- जनसंख्या में वृद्धि या कमी निकालने हेतु चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का प्रयोग किया जाता है।
- एक वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज समान होते हैं, यदि चक्रवृद्धि ब्याज वार्षिक देय हो।

$$\text{मिश्रधन (A)} = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^t$$

चक्रवृद्धि ब्याज (C.I.) = P - A

- यदि ब्याज की दर प्रत्येक समय-अवधि के लिए भिन्न-भिन्न हो, तो

$$A = P \left(1 + \frac{R_1}{100} \right) \left(1 + \frac{R_2}{100} \right) \dots \left(1 + \frac{R_N}{100} \right)$$

- यदि समय $a \frac{b}{c}$ वर्ष रूप में हो, तो

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^a \left(1 + \frac{R}{100} \times \frac{b}{c} \right)$$

- यदि P मूलधन के लिए r% की दर से t वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अन्तर x रूप हो, तब

- a) यदि t=2 वर्ष है, तो

$$\text{ब्याज का अंतर } x = P \left(\frac{r}{100} \right)^2$$

- b) यदि t=3 वर्ष है, तब

$$\text{तीन वर्ष का ब्याज अंतर } x = P \left(\frac{r}{100} \right)^2 \left(3 + \frac{r}{100} \right)$$

- यदि चक्रवृद्धि ब्याज पर दिया गया कोई धन t वर्ष में x गुना हो जाती है, तो उसी राशि को y गुना होने में लगा समय निम्नवत् होगा -

$$\text{अभीष्ट समय } T = t \cdot \frac{\log y}{\log x}$$

- यदि चक्रवृद्धि ब्याज पर दी गई राशि X का t वर्ष में मिश्रधन Y होता है, तो

$$\text{दर } \% = \left[\left(\frac{Y}{X} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \times 100\%$$

- यदि धन P, r% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उधार दिया गया; यदि वह धन ब्याज सहित n बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाना हो, तो प्रत्येक किस्त

$$\text{प्रत्येक वार्षिक किस्त} = \frac{P}{\frac{100}{100+r} + \left(\frac{100}{100+r} \right)^2 + \dots + \left(\frac{100}{100+r} \right)^n}$$

विभिन्न प्रकार के प्रश्न के हल :

एक आदमी 5000 रुपये बैंक से चक्रवृद्धि ब्याज पर 10% वार्षिक दर कर्ज लेता है, तो वह 2 वर्ष बाद कितनी ब्याज अदा करेगा -

10%	मिश्रधन	मूलधन
1 : 10	11 : 10	
ब्याज मूलधन	(2वर्ष) 121यूनिट	100यूनिट
	ब्याज = 21यूनिट	
100यूनिट=5000	ब्याज = 21×50=1050रुपये	

1यूनिट = 50

विधि:2

5000रु.

दर 1/10

500रु.

1/10

500रु.

1/10

50रु.

कुल ब्याज = 500+500+50=1050रु.

विधि : 3

दो वर्ष के लिए अनुपात = 2 : 1 (11×11=121)

तीन वर्ष के " " = 3 : 3 : 1 (11*11*11=1331)

चार वर्ष के " " = 4 : 6 : 4 : 1 (11^4 = 14641)

पाँच वर्ष के " " = 6 : 1 : 0 : 5 : 1 (11^5 = 161051)

n वर्ष के " " = अंतिम n अंक (11^n =)

प्रश्नानुसार, 5,000

1/10=500×2 : 1/10=50×1 (1000+50=1050रु.)

10,000 रुपये का 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर, यदि ब्याज हर छः माह बाद जोड़ा जाए तो 2 वर्षों बाद कितना ब्याज होगा -

समय = 4 छमाही दर = 4%/2=2%छमाही = 2/100

10,000रु.

2/100= 200रु. → 2/100=4रु. → 2/100=0.08रु. → 2/100=0.0008

* 4 * 6 * 4 * 1

C.I.= 800 +24 +0.32 +0.0008

C.I.= 824.1604रु.

विशेष जानकारी -

चक्रवृद्धि दर 200रु. : 4रु. : 0.08रु. : 0.0008रु.

पहली छमाही ब्याज = 200रु. (साधारण ब्याज)

दूसरी छमाही ब्याज = 200रु. + 4रु. = 204रु.

*2 *1

तीसरी " ब्याज= 200रु.+ 8रु.+0.08रु.=208.08रु.

*3 *3 *1

चौथी " " ब्याज =200रु.+12रु.+0.24रु.+0.0008रु.=212.2408रु.

समय=2 वर्ष , दर = 8% , मिश्रधन = 5,832रु. , मूलधन = ?

मिश्रधन (A) = $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^t$

$5832 = P \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2 \Rightarrow 5832 = P \left(\frac{27}{25}\right)^2$

$5832 = P \times \frac{729}{625} \Rightarrow P = 8 \times 625 = 5000रु.$

विधि - ii $8\% = 2/25$

$$A = 27^2 = 729 \text{ Unit} = 5832 \text{ रु.} \Rightarrow 1 \text{ Unit} = 8 \text{ रु.}$$

$$\text{तब, } P = 25^2 = 625 \text{ Unit} \Rightarrow 625 \times 8 \text{ रु.} = \mathbf{5000 \text{ रु.}}$$

कोई धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज से पहले वर्ष के अंत में 650 रु. और दूसरे वर्ष के अंत में 676 रु. हो जाती है। वह धनराशि है -

$$\frac{650 \times R}{100} = 26 \Rightarrow R = 4\%$$

$$\frac{P \times 104}{100} = 650 \Rightarrow P = \frac{650 \times 25}{26} = \mathbf{625 \text{ रु.}}$$

कुल धनराशि = ? , मूलधन = ? , दर = $11\frac{1}{9}\%$, T = 2 वर्ष तथा दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = 60 रु.

$$r = 11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9} \quad P = 9 \times 9 = 81 \text{ Unit} \quad A = 10 \times 10 = 100 \text{ Unit}$$

$$1/9 = 9 \text{ Unit} \rightarrow 1/9 = 1 \text{ Unit}$$

$$\text{ब्याज दूसरे वर्ष का} = 9 + 1 = 10 \text{ Unit} = 60 \text{ रु.} \Rightarrow 1 \text{ Unit} = 6 \text{ रु.}$$

$$P = 81 \text{ Unit} = 81 \times 6 \text{ रु.} = \mathbf{486 \text{ रु.}} , A = 100 \times 6 \text{ रु.} = \mathbf{600 \text{ रु.}}$$

P = ?, R = 5%, T = 2 Year, C.I. - S.I. = 2.70 रु. , C.I. = ?

$$R = 5\% = 1/20 \text{ then} \quad P = 20 \times 20 = 400 \text{ Unit}$$

$$1/20 = 20 \text{ Unit} \rightarrow 1/20 = 1 \text{ Unit}$$

$$\text{S.I.} = 20 \times 2 = 40 \text{ Unit} \quad \& \quad \text{C.I.} = 40 + 1 = 41 \text{ Unit}$$

$$\text{C.I.} - \text{S.I.} = 2.70 \text{ रु.} \quad P = 400 \times 2.70 \text{ रु.} = \mathbf{1080 \text{ रु.}}$$

$$1 \text{ Unit} = 2.70 \text{ रु.} \quad \text{C.I.} = 41 \times 2.70 \text{ रु.} = \mathbf{110.70 \text{ रु.}}$$

P = ?, R = 15%, T = 2 Year, C.I. - S.I. = 27 रु. , C.I. = ?

$$R = 15\% = 3/20 \text{ then}$$

$$P = 20 \times 20 = 400 \text{ Unit}$$

$$3/20 = 60 \text{ Unit} \rightarrow 3/20 = 9 \text{ Unit}$$

$$\text{S.I.} = 60 \times 2 = 120 \text{ Unit} \quad \& \quad \text{C.I.} = 120 + 9 = 129 \text{ Unit}$$

$$\text{C.I.} - \text{S.I.} = 27 \text{ रु.}$$

$$P = 400 \times 3 \text{ रु.} = \mathbf{1200 \text{ रु.}}$$

$$9 \text{ Unit} = 27 \text{ रु.} \Rightarrow 1 \text{ Unit} = 3 \text{ रु.}$$

$$\text{C.I.} = 129 \times 3 \text{ रु.} = \mathbf{387 \text{ रु.}}$$

P = 9000, R = $16\frac{2}{3}\%$, T = 1 वर्ष 73 दिन , C.I. = ?

$$T = 1\frac{73}{365} \text{ वर्ष} \quad A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^a \left(1 + \frac{R}{100} \times \frac{b}{c}\right)$$

$$A = 9000 \left(1 + \frac{50}{300}\right)^1 \left(1 + \frac{50}{300} \times \frac{73}{365}\right) = \frac{9000 \times 7 \times 31}{6 \times 30} = 10850$$

$$\text{C.I.} = A - P = 10850 - 9000 = \mathbf{1850 \text{ रु.}}$$

P = ?, R = $16\frac{2}{3}\%$, T = 1 वर्ष 73 दिन , C.I. = 1850 रु.

$$R = 50/3\% = 1/6$$

$$P = 36 \text{ Unit}$$

$$1/6 = 6 \text{ Unit} \rightarrow 1/6 = 1 \text{ Unit} \quad \text{तब एक वर्ष ब्याज} = 6 \text{ Unit}$$

$$\text{दूसरी वर्ष का ब्याज C.I.} = 6 + 1 = 7 \text{ Unit}$$

$$\text{तब 73 दिन का ब्याज} = 7 \text{ Unit} \times \frac{73}{365} = \frac{7}{5} = 1.4 \text{ Unit}$$

$$\text{अतः 1 वर्ष 73 दिन का ब्याज} (6 + 1.4) \text{ Unit} = 1850$$

$$7.4 \text{ Unit} = 1850 \rightarrow 1 \text{ Unit} = 250 \text{ रु.}$$

$$\text{मूलधन } P = 36 \times 250 \text{रु.} = \mathbf{9000 \text{रु.}}$$

T=3वर्ष , R=15%, C.I. – S.I. = 1134रु. , मूलधन = ?

$$R = 15\% = \frac{3}{20} \quad P = 20 \times 20 \times 20 = 8000 \text{Unit}$$

$$\frac{3}{20} = 1200 \text{Unit} \rightarrow \frac{3}{20} = 180 \text{Unit} \rightarrow \frac{3}{20} = 27 \text{Unit}$$

$$C.I. = 3:3:1 = 1200*3 + 180*3 + 27 = 3600 + 540 + 27 = 4167 \text{Unit}$$

$$S.I. = 1200*3 = 3600 \text{Unit}$$

$$(4167 - 3600) \text{Unit} = 1134 \text{रु.}$$

$$\text{मूलधन } P = 8000 \text{Unit}$$

$$567 \text{Unit} = 1134 \text{रु.}$$

$$P = 8000 \times 2 \text{रु.}$$

$$1 \text{Unit} = 2 \text{रु.}$$

$$\mathbf{P = 16,000 \text{रु.}}$$

मूलधन=?, T=3Year, R=16 $\frac{2}{3}$ %,

तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि – दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि = 350रु.

$$R = 50/3\% = \frac{1}{6} \quad P = 6^t = 6^3 = 216 \text{Unit}$$

$$\frac{1}{6} = 36 \text{Unit} \rightarrow \frac{1}{6} = 6 \text{Unit} \rightarrow \frac{1}{6} = 1 \text{Unit}$$

$$(C.I.)_{2nd \text{ year}} = 36 + 6 = 42 \text{Unit}$$

$$(C.I.)_{3rd \text{ year}} = 36 + 6*2 + 1 = 49 \text{Unit}$$

$$(42 - 49) \text{Unit} = 350 \text{रु.} \rightarrow 7 \text{Unit} = 350 \text{रु.} \rightarrow 1 \text{Unit} = 50 \text{रु.}$$

$$\text{मूलधन } P = 216 \times 50 \text{रु.} = \mathbf{10800 \text{रु.}}$$

256 रु. का धन 2 वर्ष में 400रु. हो जाता है। दर ज्ञात कीजिए।

$$\sqrt{256} : \sqrt{400} \quad \text{दर}\% = \frac{4}{16} \times 100\%$$

$$16(P) : (A) 20 \quad \mathbf{= 25\%}$$

$$\text{ब्याज} = 20 - 16 = 4$$

7290रु. का धन 3 वर्ष में 13310रु. हो जाता है , तो दर ज्ञात कीजिए -

$$7290 : 1331$$

$$R\% = \frac{2}{9} \times 100\%$$

$$\sqrt[3]{729} : \sqrt[3]{1331}$$

$$9 : 11$$

$$\mathbf{= 22\frac{2}{9}\%}$$

कोई धन 4 वर्ष में अपने आप का 16 गुना हो जाता है , तो दर बताओ -

$$\sqrt[4]{1} : \sqrt[4]{16}$$

$$R = \frac{1}{2} \times 100\%$$

$$(P) 1 : (A) 2$$

$$\mathbf{R = 50\%}$$

अगर कोई धन 5 वर्ष में अपने से चार गुना हो जाता है, तो किस समय में यह अपने से 64 गुना होगा -

$$5 \text{वर्ष} \rightarrow 10 \text{वर्ष} \rightarrow 15 \text{वर्ष}$$

$$4 \text{गुना} \rightarrow 16 \text{गुना} \rightarrow 64 \text{गुना}$$

$$256 = 4^3 = \text{चार गुना तीन बार अतः अभीष्ट समय} = 3 \times 5 \text{वर्ष} = \mathbf{15 \text{वर्ष}}$$

कोई धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज से दो वर्षों के बाद 4,500रु. और चार वर्षों के बाद 6,750रु. हो जाती है, वह धनराशि है -

मूलधन(P) $\xrightarrow{\text{दो वर्ष}}$ 4500रु. $\xrightarrow{+\text{दो वर्ष}}$ 6750रु.

$$\frac{6750}{4500} = \frac{3}{2} \left(\text{2वर्ष में 4500 की } \frac{3}{2} \text{ गुनी हो जाती} \right)$$

$$P \times \frac{3}{2} = 4500 \Rightarrow P = \mathbf{3000\text{रु.}}$$

यदि कोई धन 2 वर्ष में 8000 हो जाता है, व 5 वर्ष में 27000रु. हो जाता है तो मूलधन ज्ञात कीजिए -

$P \rightarrow 2\text{Year} \rightarrow 8000\text{रु.} \rightarrow +3\text{Year} \rightarrow 27000\text{रु.}$

तीन वर्ष में $27000 : 8000$

एक वर्ष में $3 : 2$ गुना तब दो वर्ष में $9 : 4$ गुना

$$P \times \frac{9}{4} = 8000\text{रु.} \Rightarrow P = \mathbf{3555.55\text{रु.}}$$

5000रु. के धन का 2 वर्ष का C.I. और S.I. का अंतर 84रु. है, तो दर ज्ञात कीजिए -

5000रु विकल्प से माना दर 10% तब $500 : 50$ (अंतर=84)

माना दर 14% तब $700 : 84$ (अंतर 84) अतः **दर = 14%**

विधि - 2 सूत्र से हल कर सकते हैं

एक आदमी एक मकान खरीदता है और वार्षिक किराये का 40 गुना भुगतान करता है। इस निवेश से उसे किस ब्याज दर पर लाभ मिल रहा है -

माना वार्षिक a किराया तब क्रय मूल्य 40a

$$\text{लाभ \%} = \frac{x}{40} \times 100\% = \frac{5}{2}\% = \mathbf{2\frac{1}{2}\%}$$

एक वर्ष के लिए 10% प्रतिवर्ष (अर्द्धवार्षिक गणना करने पर) की दर पर 1200 रु. के साधारण ब्याज व चक्रवृद्धि ब्याज में कितना अंतर है -

अर्द्धवार्षिक दर = 5%

एक वर्ष की साधारण दर = 5% + 5% = 10%

एक वर्ष चक्रवृद्धि दर = $5 + 5 + \frac{25}{100} = 10.25\%$

दर अन्तर = 0.25%

ब्याज अन्तर = $1200 \times \frac{0.25}{100} = \mathbf{3\text{रु.}}$

96 रु. पर 11 प्रतिशत स्टॉक में धन लगाने से ब्याज की दर क्या मिलेगी, जबकि दलाली $\frac{1}{4}\%$ हैं -

$$\begin{aligned} \text{ब्याज दर \%} &= \frac{\text{स्टॉक की \% दर}}{100 - \text{छूट} + \text{दलाली}} \times 100\% \\ &= \frac{11}{(100 - 4) + \frac{1}{4}} \times 100\% = \frac{1100}{96\frac{1}{4}}\% \\ &= \frac{4 \times 1100}{385}\% \\ &= \frac{80}{7}\% = \mathbf{11\frac{3}{7}\%} \end{aligned}$$

$$\text{औसत} = \frac{\text{सभी राशियों का योग}}{\text{राशियों की कुल संख्या}}$$

यदि सभी राशियों को जैसा परिवर्तित किया जाता है, वैसा ही औसत परिवर्तित होता है। क्योंकि औसत \propto सभी राशियाँ

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

अंकित के पास चार पैकट समान नाप के क्रमशः 30 किग्रा. , 40 किग्रा., 50किग्रा. , 60 किग्रा. गेहूँ से भरे हैं, तो अंकित किस मध्यमान से प्रत्येक बोरे को भरे कि सभी पैकटों में समान वजन में गेहूँ हो जाए -

$$\text{अभीष्ट मध्यमान} = \frac{30+40+50+60}{4} = \frac{180}{4} = \mathbf{45kg}$$

प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए :

$$\text{अभीष्ट औसत} = \frac{\left[\frac{10(1+10)}{2} \right]}{10} = \frac{11}{2} = \mathbf{5.5}$$

एक क्रिकेटर ने पहले टेस्ट में 180 रन बनाये और दूसरे टेस्ट में 258 रन , उसे तीसरे टेस्ट में कितने रन बनाने चाहिए जिससे तीनों टेस्टों में उसके औसत रन 230 हो जाये -

$$180 + 50 \qquad 258 - 28 \qquad 230 + (50 - 28) = \mathbf{252}$$

Average = 230

सभी को औसत के समान कीजिए , अंतिम को परिवर्तित कर लीजिए ।

10 संख्याओं का औसत 40 है। तो यदि प्रत्येक संख्या में 7 जोड़ दिया जाए, तो नया औसत कितना होगा -

$$\text{नया औसत} = 40 + 7 = \mathbf{47} \text{ क्योंकि औसत} \propto \text{सभी राशियाँ}$$

6 संख्याओं में से पहली पांच संख्याओं का औसत 20 है और अंतिम पांच संख्याओं का औसत 24 है। यदि अंतिम संख्या 36 है, तो पहली संख्या है

$$1^{\text{st}} a+b+c+d+e = 5 \times 20 = 100 \quad 2^{\text{nd}} b+c+d+e+f = 5 \times 24 = 120$$

$$(1^{\text{st}} - 2^{\text{nd}}) a - e = -20 \Rightarrow a - 36 = -20 \Rightarrow a = \mathbf{16}$$

मौखिक : यदि पहली पांच संख्याओं का औसत 20 है, तो प्रत्येक संख्या 20 यदि अंतिम पांच संख्याओं का औसत 24 है, तो प्रत्येक संख्या 24 अर्थात 5 संख्याओं में 4 की वृद्धि कुल वृद्धि 20 जबकि वृद्धि 36 - 20 = 16 की होती है, यानि कोई संख्या क्रमांक दो से पांच तक 4 अधिक तो पहली संख्या 4 कम होगी अतः पहली संख्या = 20 - 4 = 16

30 परिणामों का औसत 20 हैं तथा अन्य 20 परिणामों का औसत 30 है। सभी परिणामों का औसत क्या है -

$$\text{अभीष्ट औसत} = \frac{\text{परिणामों का योग}}{\text{परिणामों की संख्या}} = \frac{30 \times 20 + 20 \times 30}{30 + 20} = \frac{1200}{50} = \mathbf{24}$$

9 संख्याओं का औसत 30 है। प्रथम 5 संख्याओं का औसत 25 और अंतिम 3 का 35 हो तो छठी संख्या क्या होगी -

$$9 \text{ संख्याओं का योग} = 9 \times 30 = 270$$

$$\text{प्रथम 5 संख्याओं का योग} = 5 \times 25 = 125$$

$$\text{अंतिम 3 का योग} = 3 \times 35 = 105$$

$$\text{छठी संख्या} = 270 - (125 + 105) = 40$$

मौखिक विधि :

माना छठी संख्या = 30 लेकिन 5 संख्यायें इससे 5 कम हैं , तो कुल कमी - 25 जबकि 3 संख्यायें 5 अधिक तो कुल अधिक +15 अतः $(-25 + 15)$ अर्थात् - 10 की कमी हुई तो दस छठी संख्या में जुड़ जायेंगे। जिससे औसत नहीं बदलेगा। तब अभीष्ट छठी संख्या = $30 + 10 = 40$

25 परीक्षाफल का औसत 18 है। प्रथम 12 का औसत 14 है तथा आखिरी 12 का 17 है। 13 वॉ परीक्षाफल कितना है -

$$\text{औसत} = 18$$

$$\text{प्रथम 12 में कमी 4 की तो कुल कमी} = -48$$

$$\text{आखिरी 12 में कमी 1 की तो कुल कमी} = -12$$

$$\text{अभीष्ट कमी} = -48 - 12 = -60 \text{ तो इतनी वृद्धि बची संख्या 13 वॉ परीक्षाफल में होगी अतः } 13 \text{ वॉ परीक्षाफल} = 18 + 60 = 78$$

आठ क्रमिक संख्याओं का औसत 6.5 है। उनमें से सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी संख्याओं का औसत होगा -

$$\text{दोनों संख्यायें औसत से बराबर कम /अधिक होगी अतः अभीष्ट औसत} = 6.5$$

अंग्रेजी की परीक्षा में 40 छात्रों के औसत अंक 72 हैं। बाद में यह पता चला कि तीन अंक 64, 62 और 84 गलती से 68, 65 और 73 लिख दिए गए थे। गलतियाँ सुधारने के बाद औसत है -

$$\begin{aligned} \text{त्रुटि} &= \text{सही मान} - \text{गलत मान} = (64+62+84) - (68+65+73) = +4 \\ +4 \text{ को } 40 \text{ छात्रों में बाटने पर अभीष्ट औसत} &= 72 + 0.1 = 72.1 \end{aligned}$$

100 चीजों का औसत 46 है। बाद में यह पता चला कि उसमें 16 को गलती से 61 पढ़ लिया था और 43 को 34 पढ़ लिया था। यह भी पता चला कि चीजों की संख्या 100 नहीं, बल्कि मात्र 90 थी। तो सही औसत कितना था -

$$\text{त्रुटि} = (16+43 + 46 \times 10) - (61+34) = +424$$

$$\text{सही औसत} = 46 + (424/90) = 46 + 4.71 = 50.7$$

7 संख्याओं का औसत 8 है। यदि उनमें एक संख्या और जोड़ दी जाए, तो औसत 9 हो जाता है। तो वह जोड़ी गयी संख्या है -

संख्या आने से औसत बढ़ता है, इसका मतलब की संख्या औसत से अधिक है, और संख्या आने 7 संख्याओं का औसत 1 बढ़ता है अतः

$$\text{अभीष्ट संख्या} = 9 + 7 = 16$$

एक बल्लेबाज का 11 इनिंग का एक निश्चित औसत है। उस बल्लेबाज ने 12 वीं इनिंग में 90 रन बनाये हैं, जिससे उसका औसत 5 रन कम हो गया है। तो 12 इनिंग के बाद उस बल्लेबाज का औसत कितना हो गया है -

$$\begin{aligned} 12 \text{ वीं में } 90 \text{ रन बनाये जिससे कुल कमी } 12 \text{ पारी} \times 5 = 60 \text{ अगर } 90 + 60 \\ = 150 \text{ रन होते तो औसत वही रहता अतः अभीष्ट औसत} = 150 - 5 = 145 \end{aligned}$$

पाँच संख्याओं का औसत 140 है। यदि उनमें से एक संख्या हटा दी जाए, तो शेष चार का औसत 130 हो जाता है। तदनुसार हटाई गई संख्या कौन-सी है

यदि 140 होती तो औसत अपरिवर्तित रहता लेकिन संख्या हटाने से चार संख्यायें $4 \times 10 = 40$ कम हो जाती अर्थात् हटी संख्या इतनी अधिक होगी
अतः अभीष्ट संख्या = $140 + 40 = 180$

एक क्रिकेट खिलाड़ी 10 टेस्ट खेलने के बाद 11वें टेस्ट में 100 रन बनाता है। परिणामस्वरूप, उसके रनों का औसत 5 बढ़ जाता है। रनों का वर्तमान औसत कितना है -

$$\text{अभीष्ट औसत} = 100 - 50(100 \text{ रनों में } 10 \text{ टेस्ट में वृद्धि } 5 \times 10) = 50$$

38 विद्यार्थियों की औसत आयु 14 वर्ष हैं उनके साथ यदि उनके शिक्षक की आयु भी शामिल कर दी जाए, तो औसत 14 वर्ष 4 महीने हो जाता है। तदनुसार, शिक्षक की आयु कितनी है -

$$\begin{aligned} \text{शिक्षक की आयु} &= 14 \text{ वर्ष } 4 \text{ महीने} + 38 \times 4 \text{ महीने} \\ &= 14 \text{ वर्ष } 4 \text{ माह} + 152 \text{ माह} = 14 \text{ वर्ष} + 13 \text{ वर्ष} = 27 \text{ वर्ष} \end{aligned}$$

50 संख्याओं का औसत 38 है। यदि दो संख्याएँ 45 और 55 निकाल दी जाए, तो शेष संख्याओं का औसत कितना है -

$$\begin{aligned} (38 \times 50 - 45 - 55) &= -24 \text{ इन संख्याओं के निकालने से शेष } 48 \text{ संख्याओं} \\ &\text{में से } 24 \text{ कम हुआ यानि प्रत्येक संख्या } 24/48 = 0.5 \text{ कम हुआ अतः} \\ \text{अभीष्ट औसत} &= 38 - 0.5 = 37.5 \end{aligned}$$

किसी महाविद्यालय के सभी कर्मचारी का औसत वेतन 6000रु. है। जिनमें 12 अधिकारियों का औसत वेतन 40,000रु. है तथा शेष शिक्षकों का औसत वेतन 5,600रु. है। महाविद्यालय में कर्मचारियों की कुल संख्या है -

$$\begin{aligned} 12 \text{ अधिकारियों के अधिक वेतन को शेष शिक्षकों के वेतन की कमी पूर्ति करके} \\ \text{करनी जिससे सभी कर्मचारी का औसत वेतन समान } 6000 \text{ रु. होगा। तब} \\ 34,000 \times 12 &= 400 \times \text{ शिक्षकों की संख्या} \\ \text{शिक्षकों की संख्या} &= 1020 \\ \text{कुल कर्मचारियों की संख्या} &= 1020 + 12 = 1032 \end{aligned}$$

तीन संख्याओं x, y तथा z का औसत 45 है। उनमें x संख्या y तथा z के औसत से 9 अधिक है। और y तथा z का औसत y से 2 अधिक है। तदनुसार x तथा z का अंतर कितना है -

$$x \text{ औसत से } 9 \text{ अधिक है, और } z \text{ औसत से } 2 \text{ अधिक है तो } x - z = 9 - 2 = 7$$

आमों के एक बगीचे में 12 पेड़ों पर 984 आम हैं। यदि उनमें 5 पेड़ों से औसतन 26 आम और 7 पेड़ों से औसतन 38 आम तोड़ दिये जाए, तो प्रत्येक पेड़ पर औसत कितने आम बचे रह जाएँगे -

$$\begin{aligned} \text{बचे आम} &= 984 - 5 \times 26 - 7 \times 38 = 588 \\ \text{अभीष्ट औसत} &= 588/12 = 49 \end{aligned}$$

रमेश ने अपनी 13 पारियों में 51 रन के औसत से रन बनाए, 14 वीं पारी में उसने 149 रन बनाए, तो अब उसका औसत रन क्या होगा -

$$\begin{aligned} 14 \text{ वीं पारी से वृद्धि} &= 149 - 51 = 98 \\ \text{अतः } 14 \text{ पारियों के बाद औसत निकालने के लिए } 98 \text{ वृद्धि को } 14 \text{ पारियों में} \\ &\text{बांटकर, जोड़ें। तब} \\ \text{नया औसत} &= 51 + 98/14 = 51 + 7 = 58 \end{aligned}$$

साझा : जब दो या दो अधिक व्यक्ति या संस्थायें अपनी पूँजी लगाकर कोई धन्धा करते हैं, तो इस कार्य को साझा या साझेदारी कहते हैं। और प्रत्येक व्यक्ति या संस्था को साझेदार कहते हैं।

साझेदारी में निवेश पूँजी, लाभ, समय में सम्बन्ध -

लाभ \propto पूँजी और लाभ \propto समय

अतः जिसकी पूँजी अधिक निवेश होगी उसका लाभ अधिक होगा। और जिसकी पूँजी अधिक समय के लिए साझा होगी उसका भी लाभ अधिक होगा।

लाभों में अनुपात = (पूँजी \times समय) में अनुपात

यदि A, B, C व्यक्ति क्रमशः t_1, t_2, t_3 समय के लिए क्रमशः P_1, P_2, P_3

पूँजी निवेश करें तो इनको लाभ L_1, L_2, L_3 प्राप्त हो तब,

$$L_1 : L_2 : L_3 = P_1 \cdot t_1 : P_2 \cdot t_2 : P_3 \cdot t_3$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

राम, श्याम और घनश्याम क्रमशः 6000रु., 8000रु. तथा 10000रु.

लगाकर एक व्यापार करते हैं, यदि 2400रु. का मुनाफा हुआ, तो राम को कितना मिलेगा

$$\text{लाभों में अनुपात} = 6000 : 8000 : 10000 = 3 : 4 : 5$$

$$\text{कुल लाभ} = 12 \text{ अनुपात} = 2400\text{रु.} \Rightarrow 1 \text{ अनुपात} = 200\text{रु.}$$

$$\text{अतः राम का लाभ} = 3 \text{ अनुपात} = 3 \times 200\text{रु.} = \mathbf{600\text{रु.}}$$

A, B, C किसी कारोबार के लिए 47000रु. अंशदान देते हैं। यदि A, B से 7000रु. अधिक और B, C से 5000रु. अधिक अंशदान देते हो, तो कुल लाभ 9400रु. में से B प्राप्त करता है -

	A	B	C	कुल
अंशदान	$x + 1200$	$x + 5000$	x	$47000 = 3x + 1700 \Rightarrow x = 10000$
अंशदान	22000	15000	10000	
लाभ	22	15	10	
कुल लाभ	47 अनुपात = 9400रु. यानि 1 अनुपात = 200रु.			
B का लाभ	= 15 अनुपात = $15 \times 200\text{रु.} = \mathbf{3000\text{रु.}}$			

राम, श्याम और घनश्याम एक चरागाह किराए पर लेते हैं, राम उस पर 7 महीने तक 10 बैल चराता है, श्याम उस पर 5 महीने तक 12 बैल और घनश्याम उस पर 3 महीने तक 15 बैल चराता है। अगर चरागाह का किराया 175रु. हो तो घनश्याम को अपने हिस्से का कितना किराया देना होगा -

	राम	श्याम	घनश्याम	कुल
किराया	10×7	12×5	15×3	175 रु.
किराया	14	12	9	35 अनुपात
35 अनुपात	= 175रु. यानि 1 अनुपात = 5रु.			

अनुज, अंकित और अतुल ने किलकर 3 : 4 : 5 के अनुपात में धन लगाकर एक व्यवसाय आरम्भ किया। 6 महीने बाद अतुल ने अपने द्वारा लगाई धनराशि का आधा भाग निकाल लिया। यदि अनुज द्वारा लगाई धनराशि 27000रु. थी और वर्ष के अन्त में मुनाफा 86000रु. था, तो उस लाभ में अनुज और अतुल के हिस्से के बीच अन्तर क्या होगा -

	अनुज	अंकित	अतुल
राशि	3	: 4	: 5
लाभ	3×12	: 4×12	: $5 \times 6 + 2.5 \times 6$
लाभ	6	: 8	: 7.5

कुल लाभ 21.5 अनुपात = 86000रु. यानि 1 अनुपात = 4000रु.
अनुज और अतुल के लाभ में अन्तर = $(6 - 7.5)$ अनुपात = 1.5 अनुपात
= 1.5×4000 रु. = **6000रु.**

अंकित को कुल धन $\frac{3}{8}$ भाग मिला तथा सोनू साझेदार को शेष धन का $\frac{3}{8}$ भाग मिला। यदि दोनों के भागों का अन्तर 36रु. हो तो कुल धन था -

$$\text{कुल धन } P \times \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \right) = 36\text{रु.} \Rightarrow P \times \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{5}{8} \right) = 36\text{रु.}$$

$$P = 36 \times \frac{8}{3} \times \frac{8}{3} = \mathbf{256\text{रु.}}$$

विधि 2 : यदि भिन्न को खत्म कर तीव्र करना हो तो भिन्न के हरों का गुणन कर मान मानो। और गणनायें मन में करते हुए तीव्र करे।

$$\text{माना कुल धन} = 64a \quad 64a \times \frac{3}{8} = 24a \quad (64 - 24)a \times \frac{3}{8} = 15a$$

$$24a - 15a = 36\text{रु.} \Rightarrow 9a = 36 \Rightarrow a = 4\text{रु. तब } 64a = \mathbf{256\text{रु.}}$$

एक व्यक्ति 3 विभिन्न योजनाओं में 6 वर्ष, 10 वर्ष और 12 वर्ष के लिए क्रमशः 10%, 12% और 15% की दर पर धन निवेश करता है। प्रत्येक योजना की अवधि पूरी होने पर, उसे समान राशि मिलती है। उसके निवेशों का अनुपात हैं

$$\text{माना सभी का लाभ } b \text{ व सभी का निवेश क्रमशः } P, Q, R \text{ हैं -}$$

$$\text{लाभ } b : b : b = P \times 6 \times 10\% : Q \times 10 \times 12\% : R \times 12 \times 15\%$$

$$1 : 1 : 1 = P : 2Q : 3R$$

$$P : Q : R = 1/1 : 1/2 : 1/3 = \mathbf{6 : 3 : 2}$$

दो आदमी अंकित और सोनू क्रमशः 15000रु. और 25000रु. एक व्यापार में निवेश करते हैं। वर्ष के अन्त में दोनों को 10000रु. का लाभ होता है। वे अपने लाभ का 12% फिर से व्यापार में लगाते हैं। बची हुई राशि में से प्रत्येक 1000रु. लेते हैं तथा फिर बची हुई राशि उनके मूल निवेश के अनुपात के अनुसार बांट लेते हैं। तब अंकित का हिस्सा कितना होगा -

अंकित	सोनू	बचा लाभ = $10000 \times 88\% = 8800$ रु.
1 st लाभ 15000रु. :	25000रु.	1000 व 1000 रुपये निकालने पर,
1 st लाभ 3 :	5	बची राशि = $8800 - 2000 = 6800$ रु.
बची राशि 6800रु. = 8अनुपात		अंकित को कुल प्राप्त हिस्सा
1 अनुपात = 850रु.		= 2550 रु. + 1000रु.
अंकित = 3अनुपात = 2550रु.		= 3550रु.

मिश्रण : दो या दो से अधिक पदार्थों के मिलने से बना नया पदार्थ मिश्रण कहलाता है।

सुझाव : इस अध्याय को अच्छी तरह सीखने के लिए प्रतिशतता व अनुपात समानुपात के बारे में ज्ञान आवश्यक है, इसलिए इन अध्याय को पहले सीख लें।

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

10रु. प्रति किग्रा. के चावल और 15रु. प्रति किग्रा. के चावलों को किस अनुपात में मिलाकर बेचा जाए, कि मिश्रण का क्रय मूल्य 18रु. प्रति किग्रा हो जाए -

यदि x व y मात्रा अनुपात में मिलाया तब ,
 अलग-अलग मात्राओं के दाम कुल मिश्रण के दाम

$$10x + 15y = 18 \times (x + y) \Rightarrow -8x = -3y \Rightarrow x : y = 3 : 8$$

एक व्यक्ति 15 रु. प्रति किग्रा तथा 20रु. प्रति किग्रा भाव की दो चायों को किस अनुपात में मिलाए, ताकि मिश्रण का भाव 16.50रु. प्रति किग्रा हो जाए

$$15a + 20b = 16.50 \times (a+b) \Rightarrow 1.5a = 3.5b \Rightarrow a : b = 7 : 3$$

अंकित ने 30 किग्रा. चावल 10रु. प्रति किग्रा की दर पर खरीदे और 35 किग्रा 11रु. प्रति किग्रा की दर के चावल को आपस में मिला। तब अंकित को 30% लाभ प्राप्त करने के लिए मिश्रित चावल को कितने रु. प्रति किग्रा. की दर पर बेचना चाहिए ?

$$\text{क्रय मू०} = 30 \times 10 + 35 \times 11 = 685 \quad \text{विक्रय मू०} = 685 \times \frac{130}{100} = 890.5$$

$$\text{नया भाव} = \text{कुल दाम} / \text{कुल मात्रा} = 890.5 \text{रु} / 65 \text{kg} = 13.7 \text{रु./kg}$$

एक मिश्रण में अम्ल और पानी की मात्रा का अनुपात 1 : 3 है यदि उसी मिश्रण में 5 लीटर अम्ल और डाल दिया जाए, तो मिश्रण का अनुपात 1 : 2 हो जाएगा। तदनुसार उस नए मिश्रण की कुल मात्रा कितने लीटर है

अम्ल	पानी	
प्रा० मात्रा a	: 3a	$\frac{a + 5\text{ली.}}{3a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3a = 2a + 10\text{ली.}$
नयी मात्रा a+5	: 3a	$a = 10\text{ली.}$
नयी	1 : 2	नयी मात्रा = a+5+3a=4a+5= 40+5=45ली

75ग्रा. चीनी के एक घोल में 30% चीनी हैं तदनुसार उस घोल में कितनी चीनी और मिलानी चाहिए कि घोल में चीनी का प्रतिशत 70% हो जाए -

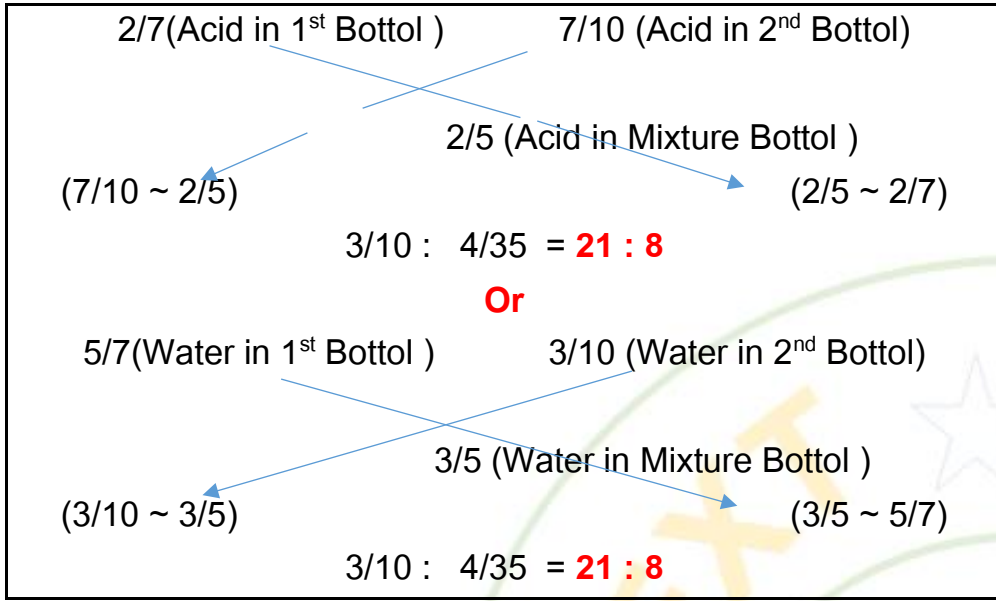
प्रा० मात्रा 100%=75g	नयी	$\frac{22.5 + a}{52.5} = \frac{70}{30}$
चीनी 30% = 22.5g	+a 70%	
पानी 70% = 52.5g	30%	$67.5 + 3a = 367.5 \Rightarrow a = 100$

25 लीटर के एक मिश्रण में अम्ल और पानी का अनुपात 4 : 1 है। उस मिश्रण में 3 लीटर अतिरिक्त पानी मिला दिया जाता है। तदनुसार अम्ल और पानी का नये मिश्रण में अनुपात कितना हो जाएगा

अम्ल	पानी	कुल=25Ltr	नया अम्ल	: नया पानी
4a	: 1a	5a = 25	20ली	: 5ली + 3ली
20ली	: 5 ली	∴ a= 5	20	: 8 = 5 : 2

एक लैब में, दो बोतलों में क्रमशः 2 : 5 तथा 7 : 3 के अनुपात में अम्ल तथा जल का मिश्रण है। इन दोनों बोतलों की समाग्रही को किस अनुपात में मिलाया जाए कि नए मिश्रण में अम्ल तथा जल का अनुपात 2 : 3 हो -

किसी एक वस्तु की मात्रा निकाल ले तीनों में फिर



मिश्रधातु C बनाने के लिए उन मिश्र धातुओं की बराबर मात्राएँ पिघलाई जाए, तो C में सोने तथा ताँबे का अनुपात क्या होगा -

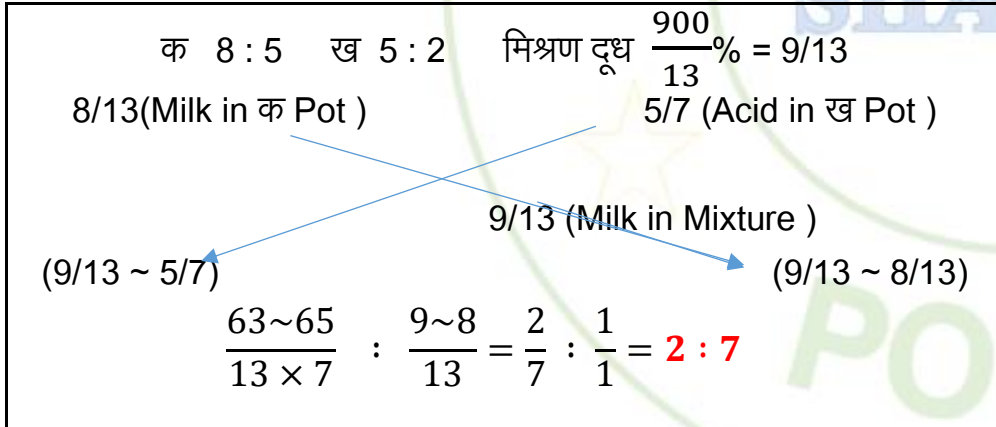
इस प्रकार के सवाल में दोनों मात्राओं को सामान करके। वस्तुओं का कुल अनुपात ज्ञात करें।

	सोना	ताँबा	समान मात्रा	सोना	ताँबा
A	7	: 2	18=9×2	14	4
B	7	: 11	18	7	11
मिश्रण में कुल सोना : कुल ताँबा =				21	: 15 = 7 : 5

20 लीटर और 36 लीटर के दो मिश्रणों में स्पिरिट और जल का अनुपात क्रमशः 3 : 7 और 7 : 5 है। दोनों मिश्रणों को इकट्ठा मिला दिया गया। नये मिश्रण में स्पिरिट और जल का अनुपात है -

स्पिरिट	जल	कुल	कुल लीटर	स्पिरिट	जल
3	: 7	10	20=10×2	3×2=6	7×2=14
7	: 5	12	36=12×3	7×3=21	5×3=15
मिश्रण में स्पिरिट : जल =				27	: 29

दो बर्तनों क तथा ख में, दूध एवं पानी के मिश्रणों में दूध तथा पानी का अनुपात क्रमशः 8 : 5 तथा 5 : 2 है। तो उक्त दोनों मिश्रणों को किस अपुपात में मिलाया जाए, कि उस नये मिश्रण में दूध $69\frac{3}{13}\%$ रहे -



यदि किसी बर्तन में a लीटर शुद्ध द्रव में से p ली० निकालकर उतना ही पानी डाला जाए और पुनः मिश्रण में से p ली० निकालकर इतना ही पानी डाला जाए, यही प्रक्रिया n बार दोहरायी जाए तो अन्त में बर्तन में द्रव a की मात्रा

$$= a \left(\frac{a-p}{a} \right)^n$$

यदि प्रत्येक निकासी व डालने की मात्रा अलग - अलग हो तब,

A और B सोने तथा ताँबे के दो मिश्र धातु हैं जो धातुओं को क्रमशः 7 : 2 तथा 7 : 11 के अनुपात में मिश्रित करके बनाये गये हैं। यदि एक तीसरा

$$\text{प्रारम्भिक मात्रा} \left(\frac{\text{प्रारम्भिक मात्रा} - \text{प्रथम निकासी}}{\text{प्रारम्भिक मात्रा}} \right) \left(\frac{\text{प्रारम्भिक मात्रा} - \text{द्वितीय निकासी}}{\text{प्रारम्भिक मात्रा}} \right) \dots$$

मिश्रण

एक बर्तन में 120 लीटर ग्लिसरीन रखी है। उसमें से 20 लीटर ग्लिसरीन निकालकर इतना ही पानी डाला गया। इसके बाद 30 लीटर मिश्रण निकाला गया और और इतना ही पानी डाला गया। पुनः 24 लीटर मिश्रण निकाला गया और इतना ही पानी डाला गया। अन्त में बर्तन में शुद्ध ग्लिसरीन कितनी रह जायेगी -

$$\begin{aligned} \text{अभीष्ट ग्लिसरीन} &= 120 \times \left(\frac{120-20}{120}\right) \left(\frac{120-30}{120}\right) \left(\frac{120-24}{120}\right) \\ &= 120 \times \frac{80}{120} \times \frac{90}{120} \times \frac{96}{120} = 8 \times 3 \times 2 = \mathbf{48\text{ली}} \end{aligned}$$

40 लीटर मिश्रण में ऐल्कोहॉल और जल का अनुपात 5 : 3 है। 8 लीटर मिश्रण निकाल कर उसकी जगह जल डाल दिया गया। तब परिणामी मिश्रण में ऐल्कोहॉल और जल का अनुपात है -

	A	W	Total
	5	3	8 = 40Ltr or 1 = 5Ltr then
	25Ltr	15Ltr	8 = - 8Ltr or 1 = -1Ltr then
	(25 - 5)	(15 - 3)+8	= 20 : 20 = 1 : 1

अम्ल और जल के तीन नमूनों में उनका अनुपात 2 : 1 , 3 : 2 तथा 5 : 3 है। उन तीनों नमूना को बराबर मात्रा में मिलाकर एक मिश्रण बनाया जाता है। तो उस मिश्रण में अम्ल तथा जल का अनुपात क्या होगा -

	Acid	Water	Total	Equal = 3,5,8 L.C.M.=120L
1 st	2 (80L)	: 1 (40L)		3(×40) 120L
2 nd	3 (72L)	: 2 (48L)		5(×24) 120L
3 rd	5 (75L)	: 3 (45L)		8(×15) 120L
	4 th 227L	: 133L		= 227 : 133

126रु. प्रति किग्रा. और 135रु. किग्रा. की चाय को एक तीसरी किस्म में 1 : 1 : 2 के अनुपात में मिलाया गया है। यदि मिश्रण 153रु प्रति किग्रा. का हो, तो तीसरी किस्म की कीमत प्रति किग्रा. होगी -

किस्म	मात्रा	भाव प्रति किग्रा	कुल दाम	
1 st	1	126Rs/Kg	126Rs	126+135+2a=612
2 nd	1	135Rs/Kg	135Rs	2a= 351
3 rd	2	a	2a	a=175.5Rs/Kg
मिश्रण	4	153Rs/Kg	612Rs	

क्रय मूल्य (Cost Price) : वस्तु को खरीदना या लेना क्रय कहलाता है। तथा जिस मूल्य पर खरीदी या ली जाती है। उसे वस्तु का क्रय मूल्य कहते हैं। इसे C.P. से प्रकट करते हैं।

विक्रय मूल्य (Selling Price) : वस्तु को बेचना या देना विक्रय कहलाता है। जाता जिस मूल्य पर बेची या दी जाती है, उस मूल्य को विक्रय मूल्य कहते हैं।

यदि क्रय < विक्रय तो लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य

यदि क्रय > विक्रय तो हानि = क्रय - विक्रय

नोट : लाभ या हानि की गणना सदैव क्रय मूल्य पर की जाती है।

$$\text{लाभ / हानि \%} = \frac{\text{लाभ / हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \frac{100 + \text{लाभ/हानि}\%}{100}$$

$$\text{क्रय मूल्य} = \text{विक्रय मूल्य} \times \frac{100}{100 + \text{लाभ/हानि}\%}$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

एक साइकिल 1000रु. में खरीदकर 1200रु. में बेच दी जाती है। तो इस सौदे में लाभ व लाभ प्रतिशत बताइये -

विक्रय	क्रय	लाभ	$\text{लाभ \%} = \frac{200}{1000} \times 100 \% = 20\%$
1200	1000	200	
C.P.	1000Rs	100% = 1000Rs	→ 1% = 10Rs
	S.P.	1200Rs	120%
	Profit	200Rs	20%

अंकित ने एक कार 80,000रु. में खरीदकर, सोनू को 10% लाभ पर बेच दी, तो सोनू ने कार कितने रु. में क्रय की -

सोनू द्वारा क्रय या अंकित द्वारा विक्रय मूल्य = $80,000 \times \frac{110}{100} = 88,000\text{रु.}$		
C.P.	80,000Rs	= 100% → 1% = 8,00Rs
S.P.	?	= 110% = 110 × 800Rs = 88,000Rs

अंकित ने एक कार 80,000रु. में खरीदकर, सोनू को 10% लाभ पर बेच दिया और सोनू ने 10% हानि पर मोनू को बेच दी। तो मोनू ने कितने रुपये में कार क्रय की -

अंकित → +10% → सोनू → -10% → मोनू			
क्रय	80,000रु.	$80,000 \times \frac{110}{100}$	$80,000 \times \frac{110}{100} \times \frac{90}{100} = 79200\text{रु.}$
Method : 2nd			

Ankit $\rightarrow +10\% \rightarrow$ Sonu $\rightarrow -10\% \rightarrow$ Monu
 C.P. 100a 110a $\rightarrow -10\% = 11 \rightarrow 99a$
 100a = 80,000Rs $\rightarrow a = 800Rs \rightarrow 99a = 79200Rs$

एक ठेला 6,000रु. में बेचने पर 20% का लाभ होता है। यदि इसे 40% लाभ पर बेचा जाए तो ठेला कितने रुपये में बिकेगा -

C.P.	2 nd S.P.
$6,000 \times \frac{100}{120}$	$6,000 \times \frac{100}{120} \times \frac{140}{100} = 7,000\text{रु.}$
C.P. 100%	
1 st S.P. 120%	= 6,000Rs $\rightarrow 1\% = 500Rs$
2 nd S.P. 140%	= 140 $\times 500Rs = 7,000Rs$

एक साइकिल 8,000रु. में बेचने पर 20% हानि होती है। यदि इसे 30% लाभ पर बेचा जाए तो साइकिल कितने रुपये में बेचेगा -

1 st S.P. $\rightarrow -20\% \rightarrow$	C.P. $\rightarrow +30\% \rightarrow$	2 nd S.P.
8,000	$8,000 \times \frac{100}{80}$	$8,000 \times \frac{100}{80} \times \frac{130}{100} = 13,000\text{रु.}$
C.P. 100%		
1 st S.P. 80%	= 8000Rs $\rightarrow 1\% = 100Rs$	
2 nd S.P. 130%	= 130 $\times 100Rs = 13,000Rs$	

एक व्यक्ति ने 20 सेब 100रु; में बेचे और 20% लाभ प्राप्त किया। तो उसने 100रु. में कुल कितने सेब खरीदे थे -

S.P. $\frac{100Rs}{20Apple} \rightarrow +20\% \rightarrow$ C.P. $= \frac{100Rs}{20Apple} \times \frac{100}{120} = \frac{100Rs}{24Apple}$

S.P. 120% = 100Rs/20Apple $\rightarrow 1\% = 1Rs/24Apple$
 C.P. 100% = ? = 100 $\times 1Rs/24Apple = 100Rs / 24Apple$

एक विक्रेता अपनी लागत कीमत पर 13% लाभ की आशा करता है। यदि एक माह में उसकी बिक्री 7,91,000रु. थी, तो उसका लाभ कितना था -

C.P. 100%	
Profit 13%	= ? = 13 $\times 7,000\text{रु.} = 91,000\text{रु.}$
S.P. 113%	= 7,91,000रु. $\rightarrow 1\% = 7,000\text{रु.}$

300रु. के सौ सेब खरीदे गये। उनमें से 4 सड़े हुए थे और शेष को 50रु. प्रति दर्जन पर बचे दिया गया। निवल लाभ कितना है -

C.P. 100Apple	300Rs
S.P. 96Apple	50Rs/12Apple = 400Rs
Profit = 400Rs - 300Rs = 100Rs	

अंकित ने एक वस्तु खरीदी और सोनू को 25% लाभ पर बेची। फिर सोनू ने उसे 10% हानि पर अनुज को बेचा और इसके लिए अनुज ने 675रु. का भुगतान किया। तो अंकित ने वस्तु कितने रुपये में खरीदी -

Ankit	Sonu	Anuj
C.P. 100a $\rightarrow +25\% = 25a \rightarrow$	125a $\rightarrow -10\% = 12.5a \rightarrow$	112.5a
112.5a = 675Rs $\rightarrow a = 6Rs$ then 100a = 100 $\times 6Rs = 600Rs$		

एक कमीज को 15% और 17% लाभ पर बेचने से विक्रय मूल्य में 3 रु. का अन्तर है, तो कमीज का क्रय मूल्य है -

C.P. 100% = ?	
1 st Profit \sim 2 nd Profit = 15% \sim 17% = 2%	

$$2\% = 3Rs \rightarrow 1\% = 1.5Rs \text{ then } ? = 100\% = 100 \times 1.5 = \mathbf{150Rs}$$

एक घड़ी को 30% लाभ पर बेचा गया है। यदि उससे 80रु. कम पर बेचा जाता, तो उस पर 10% की हानि होती। तो उस घड़ी का लागत मूल्य कितने रुपये है -

C.P. 100% = ?	130%~90% = 80रु. \rightarrow 40%=80रु.
1 st S.P. 130%	1% = 2रु. तब ? = 100% = 200रु.
2 nd S.P. 90%	

अंकित दो साइकिलें बेचता है, और प्रत्येक को 1200रु. में बेचता है, जिससे एक साइकिल पर उसे 25% लाभ और दूसरी साइकिल पर 25% हानि होती है। तो इस प्रकार अंकित को कितने रुपये की लाभ या हानि हुई -

1 st C.P. 100a = ?	1 st S.P. 125a = 1200रु.	a = 9.6रु.
2 nd C.P. 100b = ?	2 nd S.P. 75b = 1200रु.	b = 16रु.
Total C.P. = (100a + 100b) = 960रु. + 1600रु. = 2560रु.		
Total S.P. = 1200रु. + 1200रु. = 2400रु.		
S.P. - C.P. = 2400 - 2560 = - 160 रु. (हानि)		

15 सेबों का क्रय मूल्य 25 सेबों के विक्रय मूल्य के बराबर है। लाभ या हानि प्रतिशत है -

15×C.P. = 25×SP \rightarrow C.P. : S.P. = 5 : 3	S.P. - C.P. = - 2(Loss)
Loss% = $\frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$	

एक आदमी 320 आमों को 400 आमों के क्रय मूल्य पर बेचता है। उसका प्रतिशत लाभ है -

$$320 \times S.P. = 400 \times C.P. \rightarrow S.P. : C.P. = 5 : 4 \quad \text{Profit} = 5-4=1$$

$$\text{Profit \%} = \frac{1}{4} \times 100\% = \mathbf{25\%}$$

कुछ वस्तुएँ 5रु. में 6 के हिसाब से खरीदी गयी तथा 6रु. के 5 के हिसाब से बेची गयी तो लाभ प्रतिशत होगा -

दर	कुल वस्तुएं	कुल मूल्य	लाभ = 36 - 25 = 11
क्रय मू० 5रु./ 6वस्तुएं	30वस्तुएं	25रु.	लाभ% = $\frac{11}{25} \times 100\%$
विक्रय मू० 6रु./ 5वस्तुएं	30वस्तुएं	36रु.	=44%
C.P. 5Rs/6		Profit = (6/5 - 5/6) = 11/30	
S.P. 6Rs/5		Profit% = $\frac{11}{30} \times 100\% = \frac{11}{30} \times \frac{6}{5} \times 100\% = \mathbf{44\%}$	

एक लड़के ने 16रु. के 18 की दर से अण्डे खरीदे और 20रु. के 22 की दर से बेच दिये। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करो -

दर	समान अण्डे	मूल्य	(360 - 352) = +8(लाभ)
क्रय 16रु/18अण्डे	18×22	16×22=352	लाभ% = $\frac{8}{352} \times 100\% = \mathbf{\frac{25}{11}\%}$
विक्रय 20रु/22अण्डे	18×22	20×18=360	
2nd Method :			
S.P. - C.P. = (20/22 - 16/18) = (10/11 - 8/9) = 2/99 (Profit)			
Profit % = $\frac{2/99}{8/9} \times 100\% = \frac{25}{11}\% = \mathbf{2 \frac{3}{11}\%}$			

चीनी की कीमत 10% कम हो जाने पर एक व्यक्ति ने 270रु. में एक किग्रा. चीनी ज्यादा खरीदी। तो चीनी की मूल कीमत प्रति किग्रा कितनी थी -

प्रा० भाव 100a = ?	$270/90a - 270/100a = 1\text{kg}$
नया भाव 90a	$270\left(\frac{10}{900a}\right) = 1 \rightarrow 100a = \mathbf{30\text{Rs/Kg}}$

कुछ पुस्तकों के मूल्य में 40% वृद्धि हो जाने पर मुझे 84रु. में पहले से 8 पुस्तकें कम मिलती हैं। तो प्रत्येक पुस्तक का आरंभिक मूल्य ज्ञात कीजिए -

प्रा० भाव 100a = ?	$\frac{84}{100a} - \frac{84}{140a} = 8 \Rightarrow 84\left(\frac{40}{14000a}\right) = 8$
नया भाव 140a	$\Rightarrow \frac{6 \times 4}{100a} = 8 \Rightarrow 100a = \mathbf{3\text{Rs/Book}}$

एक वस्तु 12% लाभ पर बेची गयी। यदि उसका लागत मूल्य 10% कम होता और बिक्री मूल्य 5.75रु. अधिक होता तो लाभ 30% हो जाता। उस पर 20% लाभ पाने के लिए उसे कितने रूपयों में बेचना चाहिए -

C.P. 100a if -10%	90a
S.P. 112a if +5.75रु.	(112a+5.75रु)
Profit 12a then Profit	(22a+5.75रु)
$90a \times 30\% = 22a + 5.75\text{रु.} \rightarrow 27a - 22a = 5.75\text{रु} \rightarrow \mathbf{a = 1.15\text{रु}}$	
20% लाभ पाने के लिए विक्रय मूल्य = $120a = 120 \times 1.15\text{रु} = \mathbf{138\text{रु.}}$	

राम ने एक साइकिल उसके अंकित मूल्य के $\frac{11}{14}$ में खरीदी और उसे अंकित मूल्य से 10% अधिक में बेच दिया। तो लाभ प्रतिशत है -

$C.P. = \frac{11}{14} \times M.P. \rightarrow C.P. : M.P. = 11 : 14$
$S.P. = 14 + 14 \times 10\% = 14 + 1.4 = 15.4$

$$\text{Profit} = 15.4 - 11 = 4.4 \text{ then Profit\%} = \frac{4.4}{11} \times 100\% = \mathbf{40\%}$$

अंकित ने जितने रूपये में 25 कलमें खरीदी उतने ही रूपये में 20 कलमें बेच दी। तो अंकित को कितने % लाभ या हानि हुई -

$25 \times C.P. = 20 \times S.P. \rightarrow C.P. : S.P. = 20 : 25$
$S.P. - C.P. = 25 - 20 = 5 \text{ Profit \%} = \frac{5}{20} \times 100\% = 25\%$

20 सेब को बेचने पर 4 सेब के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है, तो इस सौदे में कितने % लाभ हुआ -

$\text{Profit} = 4\text{Apple}(C.P.) \text{ then } C.P. = 20$
$\text{Profit \%} = \frac{4}{20} \times 100\% = \mathbf{20\%}$

20 सेब को बेचने पर 4 सेब के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है, तो इस सौदे में कितने प्रतिशत लाभ हुआ -

$\text{Profit} = 4\text{Apple}(S.P.) \text{ then } S.P. = 20 \ \& \ C.P. = S.P. - \text{Profit} = 16$
$\text{Profit \%} = \frac{4}{16} \times 100\% = \mathbf{25\%}$

20 सेब को बेचने पर 4 सेब के विक्रय मूल्य के बराबर हानि होती है, तो इस सौदे में कितने प्रतिशत की हानि हुई -

$\text{Loss} = 4 (S.P.) \quad S.P. = 20$
$C.P. = S.P. + \text{Loss} = 20 + 4 = 24$
$\text{Loss\%} = \frac{4}{24} \times 100\% = \frac{50}{3}\% = \mathbf{16\frac{2}{3}\%}$

एक बेईमान व्यापारी अपना माल लागत मूल्य पर बेचता है, किन्तु नकली बाटों से 1 किग्रा की बजाय 960 ग्राम तौलता है। उसका लाभ प्रतिशत है -

$$C.P. = 920 \quad S.P. = 1000 \quad \text{Profit} = 80$$

$$\text{Profit \%} = \frac{80}{920} \times 100\% = 8.69\%$$

दो घड़ियों का कुल क्रय मूल्य 840 रु. है, एक घड़ी को 16% के लाभ पर तथा दूसरी को 12% की हानि पर बेचा जाता है। कुल सौदे में न लाभ होता है और न हानि। वह घड़ी, जिसे दुकानदार लाभ पर बेचता है का क्रय मूल्य होगा -

C.P. = 840 रु.	$a \times 16\% = (840 - a) \times 12\%$
1 st a = ? +16%	$16a + 12a = 840 \times 12 \rightarrow 28a = 840 \times 12$
2 nd 840 - a - 12%	$a = 360 \text{ रु.}$

एक व्यक्ति ने दो साइकिल 1600 रु. में खरीदी और उनमें पहली 10% लाभ तथा दूसरी 20% लाभ पर बेच दी। यदि उसने पहली 20% लाभ और दूसरी 10% लाभ पर बेची होती, तो उसे 5 रुपये अधिक मिल जाते। तदनुसार दोनों साइकिलों की लागत मूल्य का अन्तर कितना था -

1 st a	$[a \times 20\% + (1600 - a) \times 10\%] - [a \times 10\% + (1600 - a) \times 20\%] = 5$
2 nd (1600 - a)	$a \times 20\% - 1600 \times 10\% = 5 \rightarrow a \times \frac{1}{5} = 5 + 160 \rightarrow a = 825 \text{ रु.}$ $1600 - 825 \text{ रु.} = 775 \text{ रु.}$ तब अभीष्ट अंतर = $825 - 775 = 50 \text{ रु.}$

एक व्यापारी किसी संपत्ति को उसके मूल्य के $\frac{3}{5}$ में खरीदता है और मूल्य से 5% अधिक पर बेचता है। इस व्यापार में उसे कुल लाभ होगा।

$$\text{माना मूल्य} = 100 \text{ रु.} \quad \text{क्रय मूल्य} = 100 \times \frac{3}{5} = 60 \text{ रु.}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = 100 + 5\% = 105 \text{ रु.}$$

$$\text{लाभ} = 105 - 60 = 45 \text{ रु.}$$

$$\text{Profit \%} = \frac{45}{60} \times 100\% = 75\%$$

एक व्यक्ति 320 आम, 400 आमों की लागत कीमत पर बेचता है। उसके लाभ का प्रतिशत है।

$$320 \times S.P. = 400 \times C.P.$$

$$\frac{S.P.}{C.P.} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Profit} = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Profit \%} = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$$

एक दुकानदार खरीदने व बेचने के लिए झूठे वजन का उपयोग करके 10% बेईमानी करता है तो उसका कुल मुनाफा ज्ञात करें -

दुकानदार 100 ग्राम की जगह 110 ग्राम खरीदता तथा 100 की जगह 90 ग्राम बेचता तो कुल लाभ 20 ग्राम का 90 ग्राम पर कमाता तो

$$\text{लाभ \%} = \frac{20}{90} \times 100\% = 22\frac{2}{9}\%$$

बट्टा का अर्थ होता है छूट यानि कटौती।

अंकित मूल्य (Market Price): वह मूल्य जो किसी वस्तु पर अंकित होता है, जिस पर छूट या बट्टा दिया जाता है।

समतुल्य बट्टा (Equivalent Discount) : दो या दो से अधिक बट्टे के समान एकल बट्टा समतुल्य बट्टा कहलाता है, जैसे - 20%, 25% के समतुल्य बट्टा 40% है।

नोट : बट्टा की गणना सदैव अंकित मूल्य पर होती है।

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \times \frac{100 - \text{पहला बट्टा \%}}{100} \times \frac{100 - \text{दूसरा बट्टा \%}}{100} \times \dots$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

एक साइकिल का अंकित मूल्य 1500रु. है। उस पर 20% छूट देने पर, उसका विक्रय मूल्य कितना हो जाएगा -

$$\begin{aligned} \text{M.P. } 100\% &= 1500\text{रु.} \rightarrow 1\% = 15\text{रु.} \\ \text{S.P. } 80\% &= ? = 80 \times 15\text{रु.} = 1200\text{रु.} \end{aligned}$$

एक खिलौने के अंकित मूल्य पर 30% की छूट, उसके बिक्री मूल्य में 30रु. की कमी कर देती है। नया बिक्री मूल्य कितना है -

$$\text{M.P. } 100\% \quad \text{Discount } 30\% = 30\text{रु.} \quad \text{Then S.P. } 70\% = 70\text{रु.}$$

रहीम ने एक टी.वी. उसके सूचीगत मूल्य से 20% छूट पर खरीदा। यदि उसने वही 25% छूट पर खरीदा होता, तो उसमें उसने 500रुपये और बचा लिए होते। तदनुसार रहीम ने यह टी.वी. कितने में खरीदा था -

$$\begin{aligned} \text{M.P. } 100\% \quad 25\% - 20\% &= 500\text{रु.} \rightarrow 1\% = 100\text{रु.} \\ \text{S.P. } 80\% &= 80 \times 100\text{रु.} = 8000\text{रु.} \end{aligned}$$

एक वस्तु के अंकित मूल्य पर 12% की छूट देने के बाद, वह 880रु. में बेची गई। उसका अंकित मूल्य है -

$$\begin{aligned} \text{M.P. } 100\% &=? \quad - 20\% \quad \text{S.P. } 88\% = 880\text{रु.} \rightarrow 1\% = 10\text{रु.} \\ ? &= 100 \times 10\text{रु.} = 1000\text{रुपये} \end{aligned}$$

कोई व्यापारी सामान बेचते समय अंकित मूल्य पर 40% छूट देता है और उसे 30% की हानि होती है। यदि वह अंकित मूल्य पर बेचा जाए, तो लाभ प्रतिशत होगा -

M.P. 100a	
S.P. 60a	then C.P. = $60a \times \frac{100}{70} = 600/7$
Profit % = $\frac{100a - 600a/7}{600a/7} \times 100\% = \frac{100a}{600a} \times 100\% = 16\frac{2}{3}\%$	
2nd Method :	
C.P. 100a	M.P. 100b
S.P. 70a	S.P. 60b
70a = 60b → a : b = 6 : 7 then	
M.P. = 700 C.P. = 600	
Profit% = $\frac{100}{600} \times 100\% = 16\frac{2}{3}\%$	

एक दुकानदार किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर 10% छूट देने के बाद भी 20% लाभ कमाता है। यदि अंकित मूल्य 500रु. है, तो उस वस्तु का क्रय मूल्य है -

$$\begin{aligned} \text{C.P. } 100a \quad \text{M.P. } 100b &= 500\text{रु.} \quad \text{तब } b = 5\text{रु.} \\ \text{S.P. } 120a \quad \text{S.P. } 90b &= 90 \times 5\text{रु.} = 450\text{रु.} \\ 120a = 450\text{रु.} \rightarrow 4a &= 15\text{रु.} \quad \text{तब } 100a = 15\text{रु.} \times 25 = 375\text{रुपये} \end{aligned}$$

900रु. लागत वाली एक खिलौने पर क्रमानुसार 10% तथा 20% की छूट दी जाती है। तदनुसार उस खिलौने की वर्तमान लागत है -

$$\begin{aligned} \text{वर्तमान लागत} &= 900 \times (100 - 10)\% \times (100 - 20)\% \\ &= 900 \times \frac{90}{100} \times \frac{80}{100} = \mathbf{648\text{रुपये}} \end{aligned}$$

2nd Method :	
1 st C.P. 2 nd C.P.	100a=900रु तब a = 9 रु
100a 100a × $\frac{90}{100} \times \frac{80}{100} = 72a$	72a = 72 × 9रु = 648रुपये

20% और 10% के क्रमिक बट्टों के समतुल्य एक अकेला बट्टा निम्न है -

C.P. 100a	S.P. 100a × 80% × 90% = 100a × $\frac{80}{100} \times \frac{90}{100} = 72a$
	Discount = 100a - 72a = 28%
2nd Method :	
$D = D_1 + D_2 - \frac{D_1 \cdot D_2}{100}$	
$D = 20 + 10 - \frac{20 \times 10}{100} = 30 - 2 = \mathbf{28\%}$	

किसी घड़ी का अंकित मूल्य 820 रुपये था, एक आदमी ने दो क्रमवार बट्टे, जिनमें से पहला 20 प्रतिशत का था, प्राप्त करने के बाद उसे 570.72 रु. में खरीदा। दूसरा बट्टा था -

$$820 \times \frac{100 - 20}{100} \times \frac{100 - x}{100} = 570.72 \Rightarrow (100 - x) = 87 \Rightarrow x = \mathbf{13}$$

एक व्यापारी अपनी वस्तुओं को क्रय मूल्य से 45% अधिक अंकित करता है और अंकित मूल्य पर 20% छूट देता है। वस्तुओं पर उसे होने वाला लाभ % है -

C.P. 100a	M.P. 145a	Profit = 116a - 100a = 16a
S.P. 145a × $\frac{80}{100} = 116a$		Profit % = 16%

एक व्यापारी अंकित मूल्य पर 10% छूट देता है। 17% लाभ कमाने के लिए वह अपनी वस्तुओं पर क्रय मूल्य से कितना अधिक अंकित करें -

M.P. 100a	C.P. 100b	90a=117b a:b= 13 : 10
S.P. 90a	S.P. 117b	M.P.100a = 1300 C.P.100b = 1000
		? % = $\frac{300}{1000} \times 100\% = \mathbf{30\%}$

एक दुकानदार एक वस्तु पर वह दाम अंकित करता है जिससे उसे 25% लाभ मिले। कुछ छूट देने के बाद घटकर 12.5% रह गया। छूट % है -

C.P. 100a	M.P. 125a	$125a \times \frac{d}{100} = 12.5a$
S.P. 112.5a	Discount 12.5a	d = 10%

यदि कुछ समय बाद किसी देय धन का तत्काल धन 1600 रु. तथा मितीकाटा 160 रु. है तो महाजनी लाभ कितना हैं -

$$\begin{aligned} \text{महाजनी लाभ} &= \frac{\text{मितीकाटा}^2}{\text{तत्काल धन}} \\ &= \frac{(160 \times 160)}{1600} \\ &= \mathbf{16\text{रु.}} \end{aligned}$$

कार्य(W) = क्षमता(P) × समय(T)

क्षमता $\propto \frac{1}{\text{समय}}$ और कार्य \propto क्षमता, कार्य \propto समय

$$\frac{P_1 \times T_1}{W_1} = \frac{P_2 \times T_2}{W_2}$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

अंकित किसी कार्य को 10 दिनों में करता है, तो ज्ञात कीजिए :

- (क) अंकित की प्रति दिन कार्य करने की क्षमता क्या है ?
- (ख) इसका आधा कार्य कितनों दिनों में करेगा ।
- (ग) इस कार्य का दो गुना कार्य कितनों दिनों में करेगा ।
- (घ) यदि इस कार्य को सोनू 15 दिनों में कर सकता है, तो यदि वह अंकित के साथ कार्य करें, तो कार्य कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा ?

समय	क्षमता	कार्य	(क) क्षमता = 1/10 कार्य प्रति दिन
10 दिन	1/10	1	
(ख) जब कार्य = 1/2			समय = $\frac{\text{कार्य}}{\text{क्षमता}} = \frac{1/2}{1/10} = 10/2 = \mathbf{5 \text{ दिन}}$
(ग) जब कार्य = 2			तब समय = $\frac{\text{कार्य}}{\text{क्षमता}} = \frac{2}{1/10} = \mathbf{20 \text{ दिन}}$
अंकित	सोनू	(घ)	
समय	10	15	
क्षमता	1/10	1/15	समय = $\frac{\text{कार्य}}{\text{क्षमता}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right)} = \frac{30}{5} = \mathbf{6 \text{ दिन}}$

किसी कार्य को अजय व विजय क्रमशः 4 दिन व 6 दिन में पूरा कर देते हैं । यदि वे दोनों मिलकर काम करें, तो उस काम को पूरा करने में लगने वाले दिनों की संख्या है -

Ajay	Vijay	$? = T = \frac{W}{P} = \frac{12}{3+2} = \mathbf{2 \frac{2}{5} \text{ Day}}$
T 4Day	: 6 Day	
P 6 (3Unit)	: 4 (2Unit)	
W 12 Unit	12Unit	

हरकुश व लवकुश मिलकर एक कार्य 60 दिनों में कर सकते हैं । यदि हरकुश अकेले वह कार्य 80 दिनों में कर सकता है, तो लवकुश अकेला वह कार्य कितने दिनों में कर पाएगा -

(Har+Lav)	Har	Power of (Har+Lav) = 4Unit
T 60day	80day	3 + Lav = 4 → Lav = 1 Unit
P 4Unit	: 3Unit	$T_{Lav} = \frac{W}{P_{Lav}} = \frac{240}{1} = \mathbf{240 \text{ day}}$
W 240Unit	240Unit	

A तथा B एक साथ एक कार्य 28 दिनों में कर सकते हैं , यदि A , B तथा C उसी कार्य को एक साथ 21 दिनों में कर सकते हों, तो C अकेला उसे कितने दिनों में कर सकता है -

(A+B)	(A+B+C)	$P_C = P_{A+B+C} - P_{A+B} = 4 - 3 = 1 \text{ Unit}$ $T_C = \frac{84}{1} = \mathbf{84 \text{ day}}$
T 28day	21day	
P 3Unit	4Unit	
W 84Unit	84Unit	

A तथा B एक साथ एक कार्य 12 दिनों में कर सकते हैं। B तथा C वही कार्य 15 दिनों में और C तथा A उसे 20 दिनों में कर सकते हैं। तदनुसार A, B तथा C तीनों मिलकर वही कार्य कितने दिनों में कर सकते हैं -

(A+B)	(B+C)	(C+A)	$P_{A+B+C} = \frac{5+4+3}{2} = 6$ $T_{A+B+C} = \frac{W}{P_{A+B+C}} = \frac{60}{6} = \mathbf{10Day}$
T 12	15	20	
P 1/12	1/15	1/20	
P 5	4	3	
W 60	60	60	

एक कार्य पूरा करने में A को B की तुलना में 10दिन कम लगते हैं। यदि A तथा B दोनों मिलकर वह कार्य 12 दिनों में पूरा कर सकते हों, तो अकेले B को वह कार्य पूरा करने में कितना समय लगेगा

A	B	$T_{A+B} = \frac{W}{P_{A+B}} \Rightarrow 12 = \frac{t(t+10)}{2t+10}$ $\Rightarrow 24t + 120 = t^2 + 10t$ $\Rightarrow t^2 - 14t - 120 = 0 \Rightarrow t = +20, -6$ $T_B = t + 10 = \mathbf{30day}$
T t	(t+10)	
P (t+10)	t	
W t(t+10)	t(t+10)	

A एक कार्य को 12 दिनों में कर सकता है जबकि B अकेले उसे 15 दिनों में कर सकता है। C की सहायता से वे उस कार्य को 5 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि उन्हें पूरे कार्य के लिए 960रु. दिये जाएं तो A को कुल कितनी राशि मिलेगी -

A	B	(A+B+C)	राशि क्षमता (P) के अनुसार मिलेगी - $12U = 960रु.$ $U = 80रु$ तब A का हिस्सा $5U = 5 \times 80रु = \mathbf{400रु}$
T 12	15	5	
P 1/12	1/15	1/5	
P 5U	4U	12U	
W 60U	60U	60U	

A एक कार्य 24 दिनों में पूरा कर सकता है, B उसे 9 दिनों में तथा C 12 दिनों में कर सकता है। B तथा C कार्य आरंभ करते हैं, किन्तु 3 दिन बाद हटा दिये जाते हैं। तदनुसार A शेष कार्य कितने दिनों में कर पाएगा -

A	B	C	$B+C$ का 3 दिन कार्य = $3 \times (8+6)U = 42U$ शेष कार्य = $72U - 42U = 30U$ $? = T = \frac{W}{P_A} = \frac{30U}{3U} = \mathbf{10day}$
T 24	9	12	
P 1/24	1/9	1/12	
P 3U	8U	6U	
W 72U	72U	72U	

A एक कार्य 12 दिनों में कर सकता है। B, A की तुलना में 60% अधिक सक्षम है। तदनुसार B कितने दिनों में कार्य करेगा और दोनों मिलकर एक साथ कितने दिनों में कार्य पूरा करेंगे -

A	B	$? \times 8U = 60U \rightarrow ? = \mathbf{7.5day}$ $T_{A+B} = \frac{W}{P_{A+B}} = \frac{60}{5+8}$ $= \mathbf{\frac{60}{13} day}$
T 12Day	?	
P 100	160	
P 5U	8U	
W 60U	60U	

12 व्यक्ति किसी कार्य को 4 दिन में पूरा कर सकते हैं। इस कार्य के 8 गुने कार्य को इससे आधे समय में पूरा करने के लिए ऐसे कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी -

$$\frac{12 \times 4}{1} = \frac{M \times 2}{8} \Rightarrow M = \mathbf{192day}$$

550 व्यक्तियों के एक सहायता कैंप में उपलब्ध खाद्य-पदार्थ 28 दिनों के लिए पर्याप्त थे। यदि उस कैंप में 150 अतिरिक्त व्यक्ति आ जाएँ तो वही खाद्य पदार्थ कितने दिनों के लिए पर्याप्त होंगे -

$$550 \times 28 = (550 + 150) \times x \Rightarrow 550 \times 28 = 700x$$

$$x = 22 \text{ day}$$

12 आदमी 1.5 किमी. सड़क 7 दिन में बनाते हैं। 28 आदमी 12 किमी. सड़क कितने दिन में बनाएँगे -

$$\frac{12 \times 7}{1.5} = \frac{28 \times x}{12} \Rightarrow x = \frac{12}{0.5} = 24 \text{ day}$$

एक ठेकेदार एक कार्य 150 दिनों में पूरा करने के लिए लेता है। उसमें वह 200 व्यक्ति नियुक्त करता है। उसे पता चलता है कि 50 दिनों में केवल एक चौथाई काम पूरा हुआ है। तदनुसार वह पूरा कार्य निश्चित समय पर पूरा करने के लिए, उसे कितने व्यक्ति अतिरिक्त नियुक्त करने होंगे -

$$\frac{200 \times 50}{1/4} = \frac{(200 + M) \times 100}{3/4} \Rightarrow 200 + M = 300$$

$$\Rightarrow M = 300 - 200 = 100$$

8 पुरुष या 17 महिलाएँ एक घर को 33 दिन में पेंट कर सकते हैं। 12 पुरुषों तथा 24 महिलाओं द्वारा ऐसे तीन घरों को उसी दर से पेंट करने के लिए अपेक्षित दिनों की संख्या है -

$$W = W_a = W_m$$

$$33 \times 8 \times P_a = 33 \times 17 \times P_w$$

$$P_a : P_w = 17 : 8$$

$$T = \frac{3W}{P_{12a+24w}}$$

$$= \frac{3 \times 33 \times 8 \times 17}{12 \times 17 + 24 \times 8} = 34 \text{ day}$$

2 पुरुष और 5 महिलाएँ एक काम को 12 दिन में पूरा कर सकते हैं। 5 पुरुष और 2 महिलाएँ उसी काम को 9 दिन में पूरा कर सकते हैं। केवल 3 महिलाएँ उस काम को कितने दिन में पूरा कर सकती हैं -

$$(2a+5m) \times 12 = (5a+2m) \times 9$$

$$8a + 20m = 15a + 6m$$

$$14m = 7a \text{ then } m : a = 1 : 2$$

$$W = (2a+5m) \times 12 = (4+5) \times 12 = 108$$

$$? = T = \frac{W}{3m} = \frac{108}{3} = 36 \text{ day}$$

राम और श्याम अलग - अलग काम करते हुए एक कार्य क्रमशः 9 तथा 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं, यदि राम काम आरंभ करें और उसके बाद दोनो बारी - बारी से एक-एक करके काम करते रहे, तो वह कार्य कितने दिनों में पूरा हो जाएगा -

	Ram	Syam	Time	Work
T	9 day	12 day	2day	(4+3) = 7Unit
W	36Unit (L.C.M.)		2×5day	7×5 = 35Unit
P	4Unit	3Unit	1/4	1Unit (from Ram
			$10\frac{1}{4} \text{ day}$	36Unit

इस अध्याय में किसी नल या पंप से टंकी या बर्तन भरने या खाली करने से सम्बंधित सवालों होंगे, इसमें ठीक कार्य - समय के समान कंसेप्ट लागू इसमें भी नल या पंप की क्षमता होगी।

नोट : सभी कंसेप्ट पिछले अध्याय की तरह।

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

नल A और B एक टैंक को क्रमशः 10 घण्टे व 15 घण्टे में भर सकते हैं। दोनों एक साथ उसे भर सकते हैं -

	A	B	$T_{A+B} = \frac{W}{P_{A+B}} = \frac{30}{3+2}$ $= \frac{30}{5} = \mathbf{6Hour}$
Time	10H	15H	
Work		30Unit	
Power	3Unit	2Unit	

बराबर क्षमता के 15 पम्प किसी टैंक को 7 दिन में भरते हैं, टैंक को 5 दिन में भरने के लिए अतिरिक्त पम्पों की जरूरत होगी -

$$Work_1 = Work_2 \Rightarrow 15 \times 7 = (15 + x) \times 5$$

$$\Rightarrow x = 21 - 15 = \mathbf{6 Tank}$$

एक हौज 9 घण्टे में भरता है, परन्तु इसकी तली में एक छेद होने से यह एक घण्टा अधिक लेता है, यदि हौज पूरा भरा हो, तो वह छेद कितनी देर में हौज खाली कर देगा -

	+A	A-B	$P_B = -1U \because P_A = 10U, P_{A-B} = 9U$ $T_B = \frac{W}{P_B} = \frac{-90}{-1} = \mathbf{90Hour}$
T	9H	10H	
P	10U	9U	
W	90U	90U	

तीन नल A, B तथा C एक हौज को 6 घण्टे में भर सकते हैं। 2 घण्टे एक साथ चलाने के बाद C को बन्द कर दिया जाता है एवं A एवं B, बाद के 7 घण्टों में पूरा भरते हैं, तो हौज को भरने में C अकेला समय लेगा -

	(A+B+C)	2 घण्टे में भरा भाग 2Unit
T	6H	शेष (6 - 2)Unit = 4Unit, A+B ने 7 घण्टे में तब
W	6Unit	$P_{A+B} = \frac{W}{t} = \frac{4}{7} \text{Unit then } P_C = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} U$
P	1Unit/H	$T_C = \frac{W}{P_C} = \frac{6}{3/7} = \mathbf{14 Hour}$

दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः 15 एवं 20 घण्टे में भरते हैं। जबकि तीसरा नल C भरी टंकी को 25 घण्टे में खाली कर देता है। प्रारम्भ में तीनों नल खोल दिए जाते हैं और 10 घण्टे बाद C बन्द कर दिया जाता है, तो टंकी कितने समय में भरेगी -

	+A	+B	-C	10 घण्टे में तीनों ने भरा $10 \times 23U = 230U$ शेष भाग 70U भरा A+B ने तब $T = \frac{W}{P_{A+B}} = \frac{70}{35} = \mathbf{2Hour}$ तब कुल समय = 10घण्टे + 2घण्टे = 12 घण्टे
T	15H	20H	25H	
W		300Unit		
P	20U	15U	-12U	

मदिरा से भरे पूरे बर्तन का वजन 16.5 किग्रा है। जब बर्तन 1/4 भाग भरा है उसका वजन 5.25 किग्रा है तो खाली बर्तन का वजन क्या है -

$$\text{बर्तन का वजन} = a, \text{ कुल मदिरा} = m \text{ तब}$$

$$a+m = 16.5\text{kg} \quad \& \quad a + \frac{1}{4}m = 5.25\text{kg}$$

$$(a+m) - (a + \frac{1}{4}m) = 16.5 - 5.25 \quad \frac{3}{4}m = 11.25 \quad m = 15\text{kg}$$

$$a = 16.5 - 15 = \mathbf{1.5\text{kg}}$$

किसी टंकी का $\frac{3}{4}$ भाग पानी से भरा हुआ है। उसमें से 30 लीटर पानी निकाला जाए, तो टंकी खाली हो जाती है। टंकी की धारिता है -

$$\frac{3}{4} \times \text{धारिता} = 30 \text{ ली} \Rightarrow \text{धारिता} = 10\text{ली} \times 4 = 40\text{लीटर}$$

पानी से भरी 12 बाल्टियों से एक टंकी भरी जा सकती है, जबकि प्रत्येक बाल्टी में 13.5लीटर पानी आता है। इस टंकी को 9 लीटर क्षमता की कितनी बाल्टियाँ भर सकती हैं -

$$12 \times 13.5 = ? \times 9 \rightarrow ? = \mathbf{18\text{Ltr}}$$

बराबर क्षमता के 15 पम्प किसी टैंक को 7 दिन में भरते हैं, टैंक को 5 दिन में भरने के लिए कितने अतिरिक्त पम्पों की जरूरत होगी -

$$W_1 = W_2$$

$$15 \times 7 = (x + 15) \times 5$$

$$21 = x + 15$$

$$x = \mathbf{6}$$

भूपेन्द्र एक घंटे में 32 रसगुल्ले खा सकता है। उसके भाई सुरेन्द्र को इतने ही रसगुल्ले खाने में तीन घंटे लगते हैं। ये दोनों मिलकर 32 रसगुल्ले खाने में कितने समय लेंगे -

भूपेन्द्र की क्षमता = 32 रसगुल्ले प्रति घंटा

सुरेन्द्र की क्षमता = $\frac{32}{3}$ रसगुल्ले प्रति घंटा

दोनों की क्षमता = $32 + \frac{32}{3} = \frac{4 \times 32}{3}$ प्रति घंटा

$$T = \frac{W}{P} = \frac{32}{\frac{4 \times 32}{3}} = \frac{3}{4} \text{ Hour} = \frac{3}{4} \times 60 \text{ Minute}$$

$$= \mathbf{45\text{Minute}}$$

[19] दूरी - चाल व समय [Distance, Speed & Time]

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} \quad \text{या} \quad \text{दूरी} = \text{चाल} \times \text{समय}$$

$$1 \text{ किमी / घण्टा} = \frac{1000 \text{ मी}}{3600 \text{ से}} = \frac{5}{18} \text{ मी / से} \quad \text{या} \quad 1 \text{ मी / से} = \frac{18}{5} \text{ किमी / घण्टा}$$

विभिन्न टाइप के सवालों का तकनीकी हल :

36 किमी / घण्टा को मी / सेकण्ड में बदलिए -

$$36 \text{ km / h} = 36 \times \frac{5}{18} \text{ m/sec} = \mathbf{10 \text{ m/sec}}$$

राम 600 मीटर लम्बी सड़क 6 मिनट में पार कर लेता है। तदनुसार राम की चाल किमी / घण्टा में है -

$$\text{Speed} = \frac{600 \text{ mt}}{6 \text{ minute}} = 100 \times \frac{1}{1000} \text{ km} \times \frac{60}{\text{Hour}} = \mathbf{6 \text{ km/Hour}}$$

एक कार किसी यात्रा को 11 घंटों में पूरा करती है, पहली आधी 30 किमी / घंटा और दूसरी आधी 25 किमी / घंटा पर। कार कुल कितनी दूरी चली -

$$\begin{aligned} \text{Total Distance} &= 2d \text{ then} \\ d/30 + d/25 &= 11 \rightarrow d = \frac{11 \times 30 \times 25}{55} = 150 \\ 2d &= 2 \times 150 = \mathbf{300 \text{ km}} \end{aligned}$$

एक आदमी ने 7 घंटे में 80 किमी की दूरी की यात्रा की जिसमें से उसने कुछ यात्रा 8 किमी प्रति घंटे की दर पर पैदल की और कुछ यात्रा 16 किमी प्रति घंटे की दर पर साइकिल से की। उसने कितनी दूरी की यात्रा पैदल तय की -

$$\begin{aligned} \text{पैदल दूरी} + \text{साइकिल से चली दूरी} &= \text{कुल दूरी} \\ 8 \times t + 16 \times (7 - t) &= 80 \Rightarrow 8t = 32 \Rightarrow t = 4 \text{ Hour} \\ \text{पैदल दूरी} &= 8 \times t = 8 \times 4 = \mathbf{32 \text{ km}} \end{aligned}$$

एक सिपाही किसी चोर के पीछे जाता है जो 100 मीटर दूर है, यदि सिपाही 8 मिनट में 1 किमी भागे और चोर 10 मिनट में एक किमी, तो चोर को पकड़े जाने से पहले उसके द्वारा चली गई दूरी है -

$$S_p = \frac{1 \text{ km}}{8 \text{ minute}} = \frac{1000 \text{ m}}{8 \text{ minute}} = \frac{125 \text{ m}}{\text{minute}}$$

$$S_t = \frac{1000 \text{ m}}{10 \text{ minute}} = 100 \text{ m/minute}$$

$$125 \times t - 100 \times t = 100 \Rightarrow t = 4 \text{ minute}$$

$$D_t = 100 \times t = 100 \times 4 = \mathbf{400 \text{ m}}$$

एक जीप एक कार का पीछा कर रही है, जो जीप से 5 किमी आगे है। उनकी चाल क्रमशः 90 किमी/घण्टा तथा 75 किमी/घण्टा है। जीप, कार को कितने मिनट के पश्चात् पकड़ लेगी -

$$90 \text{ km/h} \times T - 75 \text{ km/h} \times T = 5 \text{ km} \rightarrow 15T = 5 \rightarrow T = 1/3 \text{ h} = \mathbf{20 \text{ minute}}$$

एक बस 60 किमी/घण्टा की दर से एक निश्चित दूरी तय करती है और उसी रास्ते पर 40 किमी/घण्टा की दर से वापस लौटती है तो सम्पूर्ण यात्रा में बस की औसत गति रही -

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{120 + 120}{\frac{120}{60} + \frac{120}{40}} = \frac{240}{2 + 3} = \frac{240}{5} = \mathbf{48 \text{ km/h}}$$

एक बस 3 किलोमीटर के चार क्रमिक दूरी 10 किमी/घण्टा , 20 किमी/घण्टा , 30 किमी/घण्टा और 60 किमी/घण्टा की गति से तय करती है। उसकी औसत गति है -

$$\text{औसत चाल} = \frac{3+3+3+3}{\frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{3}{30} + \frac{3}{60}} = \frac{12}{\frac{3((6+3+2+1))}{60}} = \frac{12 \times 60}{3(12)} = 20 \text{ km/h}$$

एक आदमी अपनी मूल गति के $\frac{3}{4}$ पर चलता हुआ अपने गंतव्य स्थान पर सामान्य समय से 20 मिनट देरी से पहुँचा। उसका सामान्य समय है -

1 st	2 nd	$4a - 3a = 20 \text{ minute}$
Speed	$4a : 3a$	$a = 20 \text{ minute then}$
Time	$3a : 4a$	$? = 3a = 3 \times 20 = 60 \text{ minute}$

5 किमी/घंटा की गति से चलने पर एक छात्र अपने विद्यालय 15 मिनट पहले पहुँच जाता है और 3 किमी/घंटा की गति से चलने पर 9 मिनट देर से पहुँच पाता है। तदनुसार उस छात्र के घर तक विद्यालय के बीच की दूरी कितनी है -

Speed	5km/h	3km/h	$\frac{t-15}{t+9} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5t - 75 = 3t + 27$
Time	3	: 5	$\Rightarrow 2t = 102, t = 51 \text{ min}$
Time	$t-15$	$t+9$	दूरी = $3 \text{ km/h} \times 60 \text{ min} = 3 \text{ km/h} \times 1 \text{ h} = 3 \text{ km}$

यदि कोई गाड़ी 40 किमी/घंटा पर चले तो अपने गंतव्य स्थान पर 11 मिनट देर से पहुँचती है यदि वह 50 किमी/घंटा पर चले तो केवल 5 मिनट देर से पहुँचती है। यात्रा पूरी करने के लिए गाड़ी का सही समय (मिनट में) है -

Speed	40km/h	50km/h	$\frac{t+11}{t+5} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4t + 44 = 5t + 25$
Time	5	: 4	$\Rightarrow t = 19 \text{ min}$
Time	$t+11$	$t+5$	

तीन कारों की चाल 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं, उनके द्वारा एक ही दूरी तय करने के लिए, लिए गये समय का अनुपात है -

Speed	3	4	5
Time	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

$$= 60/3 : 60/4 : 60/5 = 20 : 15 : 12$$

एक पहिए का व्यास 98 सेमी है। तदनुसार उस पहिए को 1540 मी. की दूरी तक चलाने में उसके कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे -

$$\text{एक चक्कर में चली दूरी} = \text{पहिये की परिधि} = 2\pi r = \frac{22}{7} \times 98 = 22 \times 14 \text{ cm}$$

$$22 \times 14 \text{ cm} \times \text{कुल चक्कर} = 154000 \text{ cm} \rightarrow \text{कुल चक्कर} = 500$$

एक आदमी एक निश्चित दूरी पैदल चलता है और सवारी लेकर पुनः वापस आने में कुल 37 मिनट लेता है। वह दोनों ओर 55 मिनट में पैदल चल सकता था। दोनों ओर सवारी से यात्रा करने में कुल कितना समय लगेगा -

$$\text{एक तरफ से पैदल आने में लगा समय} = 55/2 \text{ मिनट} = 27.5 \text{ मिनट}$$

$$\text{एक तरफ से सवारी से लगा समय} = 37 - 27.5 = 9.5 \text{ मिनट}$$

$$\text{दोनों ओर से सवारी से लगा समय} = 2 \times 9.5 \text{ मिनट} = 19 \text{ मिनट}$$

स्मरणीय तथ्य :

- रेलगाड़ी किसी व्यक्ति या खंभे को पार करती है, तो रेलगाड़ी अपनी लम्बाई के बराबर दूरी तय करती है।
- यदि रेलगाड़ी किसी दी गई दूरी जैसे - प्लेटफॉर्म की लम्बाई तो रेलगाड़ी द्वारा तय कुल दूरी = रेलगाड़ी की लम्बाई + प्लेटफॉर्म की लम्बाई
- जब रेलगाड़ी एक ही दिशा में चलने वाले व्यक्ति या रेलगाड़ी को पार करे तो पार करते समय गति (1st Speed ~ 2nd Speed) घट जाती है।
- जब रेलगाड़ी विपरीत दिशा में चलने वाले व्यक्ति या रेलगाड़ी को पार करे तो पार करते समय गति (1st Speed + 2nd Speed) बढ़ जाती है।

एक रेलगाड़ी 60 किमी/घण्टा की गति से चलती है और कुछ दूरी 3.5 घण्टों में तय करती है, यदि यह दूरी 3 घण्टे में पूरी करने हो तो रेलगाड़ी की गति होगी

$$\text{दूरी } 60\text{km/h} \times 3.5\text{h} = S \times 3\text{h} \rightarrow S = \mathbf{70\text{km/h}}$$

एक रेलगाड़ी 36 किमी / घंटा की गति से चलकर एक स्थिर व्यक्ति को 25 सेकण्ड में पार कर लेती है, तो उस रेलगाड़ी की लम्बाई कितनी है -

$$L = 36 \text{ km/h} \times 25\text{sec} = 36 \times \frac{5}{18} \text{ mt/sec} \times 25\text{sec} = \mathbf{250\text{mt}}$$

एक 100 मीटर लम्बी रेलगाड़ी जो 20 किमी/घंटा की रफ्तार से चल रही है, एक टेलीफोन के खम्भे को पार करने में कितने सेकण्ड का समय लेगी-

$$? = T = d/s = \frac{100\text{m}}{20\text{km/h}} = \frac{5\text{m}}{1 \times \frac{5}{18} \text{ m/sec}} = \mathbf{18 \text{ sec}}$$

110 मीटर लम्बी एक ट्रेन विपरीत दिशा में 6 किमी प्रति घंटा से दौड़कर आते हुए व्यक्ति के पास 6 सेकण्ड में गुजर जाती है। ट्रेन की गति है -

$$\text{पार करते समय चाल (रेल की चाल + व्यक्ति की चाल)} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लम्बाई}}{\text{पार करने में लगा समय}}$$

$$(x + 6)\text{km/h} = \frac{110}{6} \times \frac{18}{5} \text{ km/h} \Rightarrow x + 6 = 66$$

$$\Rightarrow x = 66 - 6 = \mathbf{60\text{km/h}}$$

180 मी लम्बी एक रेलगाड़ी 20 मी/से की गति से चलती हुई एक व्यक्ति को जो गाड़ी की दिशा में 10 मी/से की गति से चल रहा है, को कितने समय में पार करती है -

$$t = \frac{180\text{m}}{(20 - 10)\text{sec}} = \frac{180}{10} = \mathbf{18\text{sec}}$$

दो रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा में 56 किमी / घंटा एवं 29 किमी/घण्टा की चाल से चलती हैं। तेज चलने वाली रेलगाड़ी धीमी चलने वाली रेलगाड़ी में बैठे एक व्यक्ति को 16 सेकण्ड में पार कर जाती है। तेज चलने वाली रेलगाड़ी की लम्बाई क्या होगी -

$$\text{तेज रेलगाड़ी की लम्बाई (पार करते समय दूरी)} = \text{चाल} \times \text{समय}$$

$$h = (56 - 29)\text{km/h} \times 16\text{sec} = 27 \times \frac{5}{18} \text{ m/sec} \times 16\text{sec}$$

$$h = \mathbf{120\text{m}}$$

एक 132 मीटर लम्बी रेलगाड़ी 36 किमी/घण्टा की चाल से 110 मीटर लंबे प्लेटफार्म को कितनी देर में पार कर लेगी -

$$t = \frac{(132 + 110)m}{36km/h} = \frac{242m}{36 \times \frac{5}{18} m/sec} = \mathbf{24.2sec}$$

एक रेलगाड़ी प्लेटफार्म पर खड़े एक व्यक्ति को 8 सेकण्ड में पार करती है तथा 264 मीटर लम्बे इस प्लेटफार्म को 20 सेकण्ड में पार करती है। रेलगाड़ी की लम्बाई (मीटर में) है -

$$\frac{h}{8} = \frac{h + 264}{20} \Rightarrow 5h = 2h + 528 \Rightarrow 3h = 528 \Rightarrow h = \mathbf{176m}$$

100 मीटर लम्बी एक गाड़ी 50 किमी/घंटा की चाल से चलते हुए विपरीत दिशा से आ रही 120 मीटर लंबी गाड़ी को 6 सेकण्ड में पार करती है। दूसरी गाड़ी की चाल है -

$$(50 + x)km/h = \frac{100m + 120m}{6sec} \Rightarrow 50 + x = \frac{220}{6} \times \frac{18}{5} km/h$$

$$x = 132 - 50 = \mathbf{82km/h}$$

समान लम्बाई की दो ट्रेनें समांतर लाइनों पर एक ही दिशा में क्रमशः 46 किमी/घंटा और 36 किमी/घंटा की दर पर चल रही है। तेज चलने वाली ट्रेन धीमी ट्रेन से 36 सेकण्ड में आगे निकल जाती है। प्रत्येक ट्रेन की लम्बाई कितनी है -

$$(46 \sim 36)km/h = \frac{(h + h)m}{36sec} \Rightarrow 10 \times \frac{5}{18} m/sec = \frac{2h}{36} m/sec$$

$$\Rightarrow 50 = h \Rightarrow h = \mathbf{50m}$$

दो ट्रेने चण्डीगढ़ के लिये दिल्ली से शाम 6 बजे और शाम 6 : 30 बजे चलती है और उनकी चाल क्रमशः 60 किमी/घंटे और 75 किमी/घंटे है। दिल्ली से कितने किलोमीटर दूरी पर वे दोनों ट्रेनें मिलेगी -

$$1^{st} \text{ Train Distance} = 2^{nd} \text{ Train Distance} = ?$$

$$60km/h \times (t+1/2) = 75km/h \times t \rightarrow 4t+2=5t \rightarrow t = 2 \text{ hour}$$

$$? = 75km/h \times t = 75 \times 2 = \mathbf{150km}$$

100किमी दूरी पर स्थित दो स्टेशन A तथा B है। एक रेलगाड़ी A से प्रातः 10बजे B की ओर 20 किमी/घंटा की चाल से चलना आरंभ करती है। दूसरी रेलगाड़ी उसी दिन प्रातः 10 बजे ही B से A की ओर 30 किमी. प्रति घंटा की चाल से चलती है। वे किस समय मिलेगी।

$$1^{st} \text{ Time} = 2^{nd} \text{ Time} = ?$$

$$\frac{x}{20} = \frac{100 - x}{30} \Rightarrow 3x = 200 - 2x \Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = 40km$$

$$? = \frac{x}{20} = \frac{40}{20} = \mathbf{2hour (10:00AM + 2 = 12:00PM)}$$

कोई ट्रेन एक स्टेशन से दूसरे स्टेशन तक जाने में 3 घण्टे का समय लेती है, इसकी चाल यदि 12 किमी/घण्टा कम कर दी जाए, तब इस यात्रा में उसे 45 मिनट अधिक लगते हैं, स्टेशनो के बीच की दूरी है -

Time	3H	:	$3 + \frac{45}{60} = \frac{15}{4}H$
Speed	15a	:	12a
Distance	$15a \times 3 \text{ or } 12a \times \frac{15}{4}$		

$$15a \sim 12a = 12km/h$$

$$a = 4km/h$$

$$\text{then } D =$$

$$15a \times 3 = 15 \times 4 \times 3 = \mathbf{180km}$$

स्मरणीय तथ्य :

जब नाव किसी नदी में चलती है, तो पानी के प्रवाह की चाल और नाव की चाल होती है, तथा नाव जब प्रवाह के दिशा में चलती है, तब उसकी चाल बढ़ जाती है और जब वह प्रवाह के विपरीत दिशा में चलती है, तब उसकी चाल घट जाती है।

नाव की चाल (B)



पानी की चाल (W)

एक ही दिशा में चाल

सापेक्ष चाल = B + W

नाव की चाल (B)



पानी की चाल (W)

विपरीत दिशा में चाल

सापेक्ष चाल = B - W

एक नदी की धारा की गति 6 किमी / घंटा और स्थिर पानी में एक व्यक्ति के तैरने की गति 10 किमी/घंटा है। तदनुसार उस व्यक्ति को धारा के साथ 32 किमी तैरने में कितना समय लगेगा -

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{32 \text{ km}}{(6+10) \text{ km/h}} = \frac{32}{16} \text{ h} = 2 \text{ hour}$$

एक नाव धारा के विपरीत दिशा में 3 घण्टे में 72 किमी जाता है। यदि धारा की रफ्तार 3 किमी/घण्टा हो तो शांत जल में नाव की चाल क्या होगी -

$$\frac{72 \text{ km}}{3 \text{ h}} = a - 3 \text{ km/h} \Rightarrow a = 24 + 3 = 27 \text{ km/h}$$

2km/h की गति से बह रही एक नदी में एक मोटरबोट 10km ऊर्ध्व प्रवाह जाती है और 55 मिनट में वापस आरंभिक स्थल पर आ जाती है। स्थिर जल में मोटरबोट की चाल है -

$$\frac{10}{a-2} + \frac{10}{a+2} = \frac{55}{60} \Rightarrow \frac{20a}{a^2-4} = \frac{11}{12} \Rightarrow 240a = 11a^2 - 44$$

$$\Rightarrow 11a^2 - 240a - 44 = 0 \text{ then } a = 22 \text{ km/h}$$

स्थिर जल में एक नौका की चाल 5 किमी/घंटा है और धारा की चाल 3 किमी/घंटा है। यदि नौका को एक स्थान पर जाने और वापस आने में 3 घंटे लगते हैं, तो उस स्थान की दूरी है -

$$\frac{D}{5+3} + \frac{D}{5-3} = 3 \Rightarrow \frac{D}{8} + \frac{D}{2} = 3 \Rightarrow \frac{5D}{8} = 3 \Rightarrow D = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ km}$$

एक व्यक्ति धारा 6 किमी/घंटा पर डाउनस्ट्रीम और 2 किमी/घंटा का अपनस्ट्रीम में से तैर सकता है। स्थिर जल में उसकी गति बताइये -

$$B + W = 6 \text{ km/h}$$

$$B - W = 2 \text{ km/h}$$

$$2B = 8 \text{ km/h} \rightarrow B = 4 \text{ km/h}$$

एक नाव 6 घण्टे में प्रतिकूल प्रवाह में 24 किमी और अनुकूल प्रवाह में 36 किमी की दूरी तय करती है। यही नाव 36 किमी प्रतिकूल प्रवाह में और 24 किमी अनुकूल प्रवाह में तय करने के लिए 6 घण्टे और 30 मिनट लेती है। तो स्थिर पानी में नाव की गति होगी -

$$\frac{24}{B-W} + \frac{36}{B+W} = 6 \Rightarrow \frac{4B + 4W + 6B - 6W}{(B-W)(B+W)} = 1$$

$$10B - 2W = (B-W)(B+W)$$

$$\frac{36}{B-W} + \frac{24}{B+W} = 6 \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{36B + 36W + 24B - 24W}{(B+W)(B-W)} = \frac{13}{2}$$

$$\frac{60B + 12W}{(B+W)(B-W)} = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{120B + 24W}{13} = (B+W)(B-W)$$

$$\frac{120B + 24W}{13} = 10B - 2W \Rightarrow 120B + 24W = 130B - 26W$$

$$\Rightarrow 50W = 10B \Rightarrow W : B = 1 : 5$$

$$W = 1 \text{ Unit} \quad B = 5 \text{ Unit}$$

$$10B - 2W = (B - W)(B + W) \Rightarrow 50U - 2U = 4U \times 6U$$

$$48U = 24U \times U \Rightarrow U = 2$$

$$B = 5 \text{ Unit} = 5 \times 2 = \mathbf{10 \text{ km/h}}$$

एक नौका स्थिर जल में 9 किमी/घंटा चलती है। किन्तु वह उसी दूरी को धारा के विरुद्ध चलते हुए तिगुने समय में तय करती है। धारा की गति क्या है -

Speed	Time	Distance	
9km/h	1	d	$9\text{km/h} \times 1\text{h} = (9-w)3$
$(9 - w)\text{km/h}$	3	d	$3 = 9 - w$
			$w = \mathbf{6 \text{ km/h}}$

एक नाव धारा के अनुकूल कुल तीन घंटे में 24 किमी. की दूरी तय करती है, किंतु समान दूरी को धारा के प्रतिकूल तय करने में इस 12 घंटे लगते हैं। नाव की स्थिर जल में गति क्या है -

$$B + W = 24/3 \text{ km/h} = 8 \text{ km/h}$$

$$B - W = 24/12 \text{ km/h} = 2 \text{ km/h}$$

$$B = 10/2 = \mathbf{5 \text{ km/h}}$$

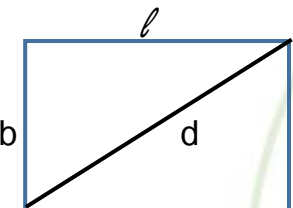
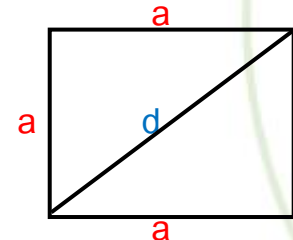
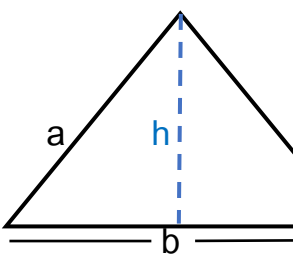
क्षेत्रमिति गणित की वह शाखा है, जिसमें लम्बाई, क्षेत्रफल और आयतन आदि के माप का अध्ययन किया जाता है

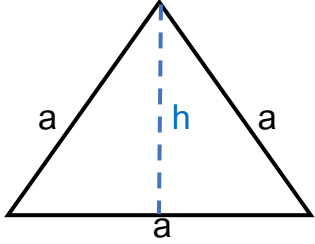
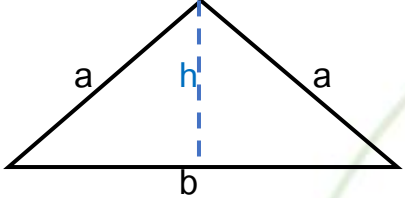
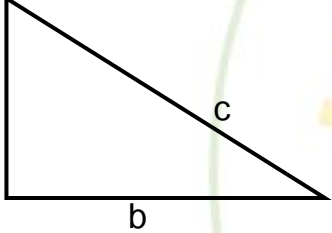
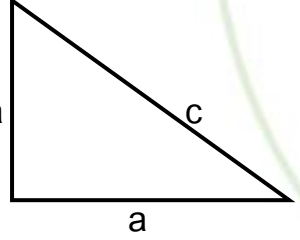
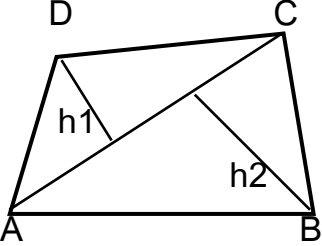
क्षेत्रमिति (Mensuration)

द्वि-विमीय क्षेत्रफल एवं परिमाप  त्रि-विमीय आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल

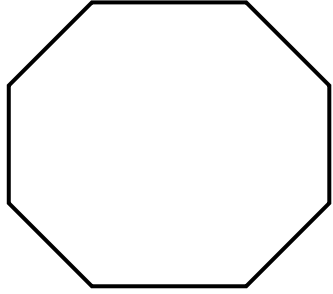
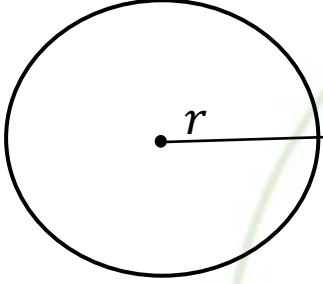
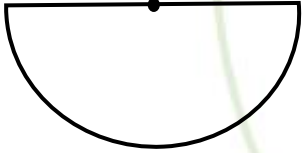
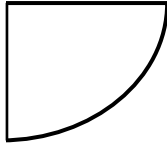
क्षेत्रफल – किसी आकृति की सभी भुजाओं के द्वारा घिरे हुए तल को उस आकृति का क्षेत्रफल कहते हैं।

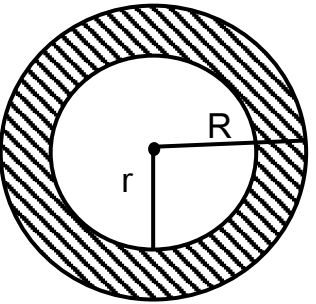
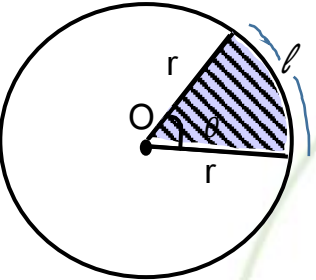
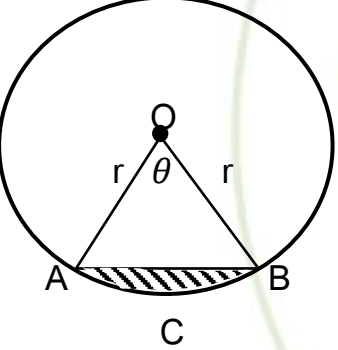
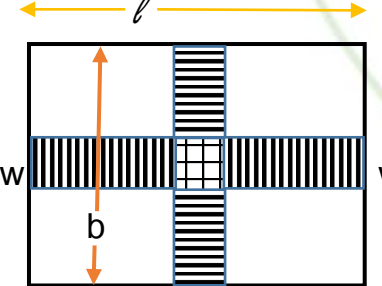
परिमाप – किसी आकृति के सभी भुजाओं की लम्बाइयों का योगफल उस आकृति का परिमाप कहलाता है।

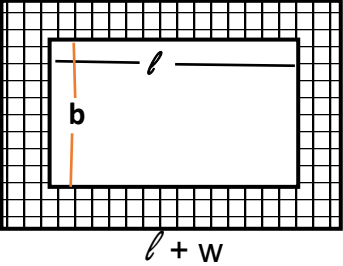
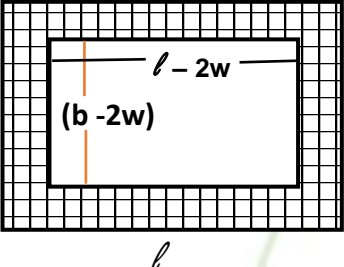
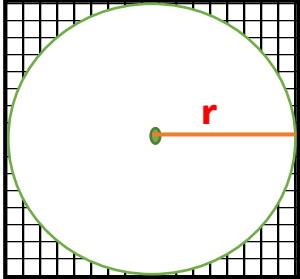
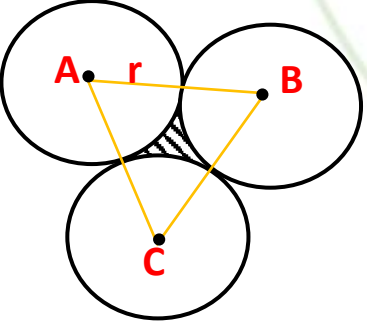
नाम	आकृति	शब्दावली	क्षेत्रफल	परिमाप
आयत		$l =$ लम्बाई $b =$ चौड़ाई विकर्ण $d = \sqrt{l^2 + b^2}$	$l \times b$	$2(l + b)$
वर्ग		$a =$ भुजा $d =$ विकर्ण $d = a\sqrt{2}$	$a \times a = a^2$ या $\frac{d^2}{2}$	$4a$
विषमबाहु त्रिभुज		a, b, c तीन भुजायें $b =$ आधार $h =$ ऊँचाई अर्द्ध परिमाप $= s$ नोट : किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।	$\frac{1}{2} \times b \times h$ या $\frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\theta$ या $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (हिरोज सूत्र)	$a + b + c = 2s$ $s = \frac{a + b + c}{2}$

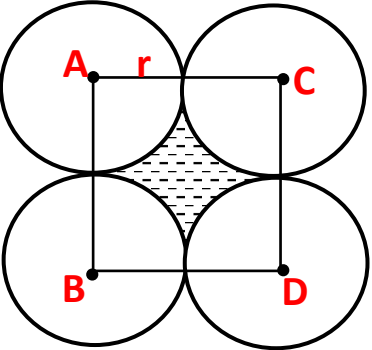
समबाहु त्रिभुज		a = समान भुजाएं h = लम्ब या माध्यिका $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$	या $\frac{1}{2} \times b \times h$ $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$3a$
समद्विबाहु त्रिभुज		a = समान भुजाएं b = आधार h = ऊँचाई या लम्ब $h = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$	या $\frac{1}{2} \times b \times h$ $\frac{1}{4} \times b \times \sqrt{4a^2 - b^2}$	$2a + b$
समकोण त्रिभुज		a = लम्ब b = आधार c = कर्ण $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{1}{2} \times b \times a$	$a + b + c$
समद्विबाहु समकोण त्रिभुज		a = बराबर भुजाएं c = कर्ण $c = a\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \times a^2$	$2a + b$
चतुर्भुज		AC = विकर्ण h1, h2 दो लम्ब भुजा AC पर क्रमशः D व B शीर्ष से	$\frac{1}{2} \times AC \times (h_1 + h_2)$	(AB + BC + CD + AD)

समांतर चतुर्भुज		a और b दो संलग्न भुजाएं h = समांतर भुजाओं के बीच की दूरी	$a \times h$	$2(a + b)$
समचतुर्भुज		a = समान भुजाएं d_1, d_2 = विकर्ण $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$	Or $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ $a^2 \cdot \sin\theta$ आधार \times ऊँचाई	$4a$
समलम्ब चतुर्भुज		h = समांतर भुजायें a, b के बीच की दूरी	Or $\left(\frac{a+b}{2}\right) \times h$ समांतर भुजाओं का योग \times स० भु० के मध्य दूरी	$a + b + p + q$
सम षट्भुज		a = प्रत्येक भुजा	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$	$6a$

सम अष्टभुज		$a =$ प्रत्येक भुजा	$2a^2(1 + \sqrt{2})$	$8a$
वृत्त		$r =$ त्रिज्या $d =$ व्यास $d = 2r$	πr^2	$2\pi r$
अर्द्धवृत्त		$r =$ त्रिज्या $d =$ व्यास $d = 2r$	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$(\pi + 2)r$
चतुर्थांश		$r =$ त्रिज्या	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{1}{2}\pi r + 2r$

<p>वृत्ताकार पथ</p>		<p>$R =$ बाहरी त्रिज्या $r =$ अंदर की त्रिज्या</p>	$\pi(R^2 - r^2)$	$2\pi R$ (बाहरी) $2\pi r$ (भीतरी)
<p>वृत्तखण्ड</p>		<p>$O =$ केन्द्र $r =$ त्रिज्या $l =$ चाप $\theta =$ कोण $l = 2\pi r \left(\frac{\theta}{360}\right)$</p>	$\pi r^2 \left(\frac{\theta}{360}\right)$	$l + 2r$
<p>वृत्त का एक क्षेत्रफल</p>		<p>$O =$ केन्द्र $r =$ त्रिज्या $ACB =$ चाप $\theta =$ कोण</p>	<p>छायांकित भाग ACB का क्षेत्रफल $r^2 \left(\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right)$</p>	$2r \left(\frac{\pi\theta}{360} + \sin\frac{\theta}{2}\right)$
<p>आयत के बीच से जाता पथ</p>		<p>$w =$ रास्ते की चौड़ाई $l =$ आयत की लंबाई $b =$ आयत की चौड़ाई</p>	<p>रास्ते का रास्ते का क्षेत्रफल $(l + b - w) \times w$</p>	$2(l + b) - 4w$

<p>आयताकार बाहरी पथ</p> <p>(b - 2w)</p>		<p>w = रास्ते की चौड़ाई l = आयत की लंबाई b = आयत की चौड़ाई</p>	<p>रास्ते का क्षेत्रफल</p> $(l + b + 2w) \times 2w$	<p>भीतरी $2(l + b)$ बाहरी $2(l + b + 4w)$</p>
<p>r</p> <p>आयताकार भीतरी पथ</p>		<p>w = रास्ते की चौड़ाई l = आयत की लंबाई b = आयत की चौड़ाई</p>	<p>रास्ते का क्षेत्रफल</p> $(l + b - 2w) \times 2w$	<p>बाहरी $2(l + b)$ भीतरी $2(l + b - 4w)$</p>
<p>छायांकित भाग</p>		<p>r = वृत्त की त्रिज्या 2r = वर्ग की भुजा</p>	<p>छायांकित भाग का क्षेत्रफल वर्ग का क्षेत्रफल - वृत्त का क्षेत्रफल</p> $(2r)^2 - \pi r^2$	
<p>छायांकित भाग</p>		<p>r = प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या ABC = समबाहु त्रिभुज 2r = समबाहु त्रिभुज की भुजा</p>	<p>छायांकित भाग का क्षेत्रफल त्रिभुज का क्षेत्रफल - अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल</p> $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) r^2$	

छायांकित भाग		$r =$ प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या $ABCD =$ वर्ग $2r =$ वर्ग की भुजा	छायांकित भाग का क्षेत्रफल वर्ग का क्षेत्रफल – वृत्त का क्षेत्रफल $(4 - \pi)r^2$ OR $\frac{6}{7}r^2$
n भुजाओं का बहुभुज	विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$	क्षे० = $\frac{na^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}$	परिवृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$ अन्तःवृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}$ सभी अन्तःकोणों का योग = $(n-2) \times 180^\circ$, सभी बाह्य कोणों का योग = 180°

नोट : किसी द्वि-विमीय आकृति में भुजा या विमा या विकर्ण जो परिवर्तन होता है, तो इनके क्षेत्रफल में (परिवर्तन के वर्ग) के समान परिवर्तन होता है, क्योंकि क्षेत्रफल में भुजा या विमा या विकर्ण का दो बार गुणन होता है। जैसे – यदि भुजा 2 गुनी कर दी जाए तो क्षेत्रफल 4 गुना हो जाएगा। या विकर्ण 3 गुना कर दिया जाए तो क्षेत्रफल 9 गुना हो जाएगा।

50 सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल व परिमाप एवं विकर्ण ज्ञात कीजिए -

$$A = 50^2 = 2500 \text{ cm}^2 \quad \& \quad P = 4 \times 50 = 200 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{2} \times 50 \text{ cm} = 50\sqrt{2} \text{ cm}$$

यदि किसी वर्ग के विकर्ण को चार गुना कर दिया जाए, तो क्षेत्रफल होगा -

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = 4^2 = 16 \text{ गुना}$$

$$d = \sqrt{2} a \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ then } A = \frac{d^2}{2}$$

$$4 \times d = \sqrt{2} a \Rightarrow a = \frac{4d}{\sqrt{2}} \text{ then } A_1 = \frac{16d^2}{2} \therefore A = 16 \times A_1$$

दो वर्गों का परिमाप 24 सेमी और 32 सेमी हैं। इन वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल वाले एक तीसरे वर्ग का परिमाप (सेमी में) है -

$$4a = 24 \text{ cm} \quad a = 6 \text{ cm} \quad 4b = 32 \text{ cm} \quad b = 8 \text{ cm}$$

$$? = 4c = 4(a+b) = 4 \times 14 \text{ cm} = 56 \text{ cm}$$

यदि दो वर्गों के क्षेत्रफलों का अनुपात 225 : 256 हो , तो उनके परिमापों का अनुपात होगा -

$$? = \sqrt{\frac{225}{256}} = \frac{15}{16} \because \text{क्षेत्रफल विमाओं का वर्ग होता है। यह मात्रक से स्पष्ट है}$$

किसी वर्ग के क्षेत्रफल का उसके विकर्ण पर खींचे गए वर्ग के क्षेत्रफल से अनुपात होगा -

$$\begin{aligned} \text{वर्ग का क्षेत्रफल } A_1 &= a^2 & \text{तब विकर्ण} &= \sqrt{2} a \\ \text{विकर्ण भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल } A_2 &= 2a^2 \\ A_1 : A_2 &= a^2 : 2a^2 = \mathbf{1 : 2} \end{aligned}$$

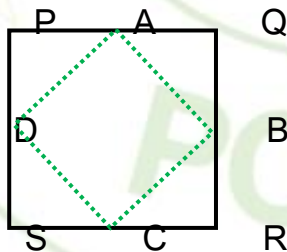
एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल 25 वर्ग किमी है। 3 किमी प्रति घंटे की गति से पार्क का एक चक्कर पूरा करने में कितना समय लगेगा -

एक चक्कर की दूरी पार्क के परिमाण के बराबर होगी।

$$\begin{aligned} a^2 &= 25\text{km}^2 \Rightarrow a = 5\text{km} \text{ then } P = 4a = 20\text{km} \\ ? &= \frac{20\text{km}}{3\text{km/h}} = 6\frac{2}{3}\text{h} = \mathbf{6\text{hour } 40\text{minute}} \end{aligned}$$

PQRS, 10cm की भुजा वाला वर्ग है। A, B, C, D क्रमशः PQ, QR, RS, SP के मध्य-बिन्दु हैं। तो बनने वाले वर्ग ABCD का परिमाण क्या होगा -

ABCD वर्ग का विकर्ण PQRS वर्ग की भुजा के बराबर होगा।
 $\sqrt{2} a = 10 \Rightarrow a = 5\sqrt{2}\text{cm}$
 $P = 4 \times 5\sqrt{2} = \mathbf{20\sqrt{2}\text{cm}}$



50 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार खेत में 750 किग्रा चावल का उत्पादन होता है। 100 मीटर भुजा वाले उतने ही वर्गाकार खेत में उत्पन्न चावल की मात्रा कितनी होगी -

भुजा	क्षेत्रफल	उत्पादन	प्रति क्षेत्रफल उत्पादन
50m	2500	750kg	750kg/2500 = 3/10kg
100m	10000	?	3/10kg then ? = 3000kg

यदि किसी वर्ग की भुजा 10% बढ़ा दी जाए तो क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होगा

a	10	+10%= 11
Area 10×10 = 100	?	11×11=121 then ? = + 21% (वृद्धि)

एक आयताकार पार्क की लम्बाई 20मीटर व चौड़ाई 30 मीटर हैं, तो पार्क को ढकने के लिए कालीन कितनी वर्ग मीटर लगेगी और पार्क के चारों ओर लगने वाले तार की लम्बाई क्या होगी , एवं पार्क में अधिकतम कितना लम्बा सीधा पाइप रखा जा सकता है -

$$\text{कालीन} = \text{क्षे०} = 20\text{m} \times 30\text{m} = \mathbf{600\text{ m}}$$

$$\text{तार की लम्बाई} = \text{परिमिति} = 2 (20\text{m} + 30\text{m}) = 2 \times 50\text{m} = \mathbf{100\text{ m}}$$

$$\text{पाइप की लम्बाई} = \text{विकर्ण} = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1000} = \mathbf{100\text{ m}}$$

किसी आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई में 3 : 2 का अनुपात है।

यदि इसकी परिमाण 80 मी० हो, तो इसकी चौड़ाई होगी -

L	B	2(3a+2a)=80 m → 5a = 40m → a = 8 m
3a	2a	? = 2a = 2 × 8cm = 16cm

एक आयत की लंबाई 60% बढ़ाई गई है। तदनुसार उसकी चौड़ाई कितनी कम करनी होगी, ताकि आयत का क्षेत्रफल अपरिवर्तित रहे -

L	100	+60%	160	(100-?)160 = 10000
---	-----	------	-----	--------------------

B	100	- ?	(100 - ?)	$1600 - 16 \times ? = 1000$
A	10000		(100 - ?)160	$16 \times ? = 600 \Rightarrow ? = \frac{75}{2} = 37.5\%$

एक त्रिभुजाकार खेत की तीन भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 15 मी, 20 मी तथा 25 मी है। तदनुसार उसमें 10 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर पर बीज बोने की लागत की गणना कीजिए -

$$s = 60/2 = 30\text{cm}$$

$$\text{खेत का क्षेत्रफल} = \sqrt{30(30 - 15)(30 - 20)(30 - 25)} =$$

$$\sqrt{30 \times 15 \times 10 \times 5} = \sqrt{3 \times 10 \times 3 \times 5 \times 10 \times 5} = 150\text{m}^2$$

$$\text{लागत} = 150\text{m}^2 \times 10\text{Rs/m}^2 = 1500\text{Rs}$$

यदि एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक माध्यिका की लम्बाई $6\sqrt{3}\text{cm}$ हो तो उस त्रिभुज का परिमाण कितना होगा -

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \Rightarrow a = 12\text{cm}$$

$$P = 3a = 3 \times 12\text{cm} = 36\text{cm}$$

एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाण 544 सेमी है और उसकी प्रत्येक समान भुजा उसके आधार की $\frac{5}{6}$ गुनी है। तदनुसार, उस त्रिभुज का क्षेत्रफल कितने वर्ग सेमी होगा -

$$a (\text{समान भुजा}) = \frac{5}{6} \times b (\text{आधार}) \quad a = 5 \text{ Unit} \quad b = 6 \text{ Unit}$$

$$a + a + b = 544 \Rightarrow 16\text{Unit} = 544\text{cm} \Rightarrow 1\text{Unit} = 34\text{cm}$$

$$A = \frac{1}{4} \times b \times \sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{4} \times 6U \times \sqrt{4 \times (5U)^2 - (6U)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \times 6U \times 8U = 6 \times 34\text{cm} \times 2 \times 34\text{cm} = 13,872\text{cm}^2$$

किसी समचतुर्भुज का परिमाण 40 मी है और उसकी ऊँचाई 5 मी है। इसका क्षेत्रफल है -

$$4 \times \text{भुजा (a)} = 40\text{m} \quad a = 10\text{m} \quad A = a \times h = 10 \times 5 = 50 \text{ वर्ग मीटर}$$

किसी समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 150 वर्ग सेमी है। उसके एक विकर्ण की लम्बाई 10 सेमी है, दूसरे विकर्ण की लम्बाई होगी -

$$d_1 \times 10\text{cm} = 150\text{cm}^2 \Rightarrow d_1 = 15\text{cm}$$

एक समान्तर चतुर्भुज की निकटवर्ती भुजाएँ 36 सेमी तथा 27 सेमी हैं। तदनुसार यदि उस चतुर्भुज की छोटी भुजाओं की दूरी 12 सेमी हो, तो बड़ी भुजाओं की दूरी कितनी होगी -

$$\text{क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{मध्य दूरी} \quad \text{तब}$$

$$27 \times 12 = 36 \times h \Rightarrow h = 9\text{cm}$$

चतुर्भुज आकार के क्षेत्र का विकर्ण 24 मीटर है और शेष सम्मुख शीर्षों से बनाए गए लंब 8 मीटर और 13 मीटर हैं। क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना है -

$$? = A = \frac{1}{2} \times d_1 \times (l_1 + l_2) = \frac{1}{2} \times 24 \times 21 = 252\text{m}^2$$

किसी समषट्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा 2 सेमी है, का क्षेत्रफल है -

$$? = A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\text{cm} \times 2\text{cm} = 3\sqrt{3}\text{cm}^2$$

एक समषट्भुज और एक समबाहु त्रिभुज जिनके परिमाण समान हैं, तो क्षेत्रफलों का अनुपात होगा -

$$\text{समषट्भुज की भुजा (a)} \times 6 = \text{त्रिभुज (b)} \times 3 \quad a : b = 1 : 2$$

$$\text{समषट्भुज का क्षेत्रफल} : \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 : \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} 1^2 : \frac{\sqrt{3}}{4} 2^2 = \frac{3}{2} : 1 = \mathbf{3 : 2}$$

7 मीटर चौड़ा एक पथ एक वृत्ताकार पार्क के गिर्द चलता जिसकी त्रिज्या 18 मीटर है। पथ का क्षेत्रफल है -

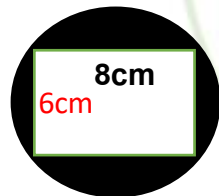
$$\text{पथ का क्षेत्रफल} = \text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल (R=18+7)} - \text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$? = \pi 25^2 - \pi 18^2 = \frac{22}{7} \times 43 \times 7 = \mathbf{946m^2}$$

4cm त्रिज्या वाले चार बराबर वृत्त एक-दूसरे को बाहर से स्पर्श करते हैं। तदनुसार, उन चारों वृत्तों से घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल है -

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = (4 - \pi)r^2 = (4 - \pi)4^2 = \mathbf{16(4 - \pi)cm^2}$$

नीचे दिये गये चित्र में आच्छादित भाग का क्षेत्रफल लगभग कितना है -



$$\text{वृत्त का व्यास} = \text{आयत का विकर्ण} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\text{cm}$$

$$\text{वृत्त की त्रिज्या} = 10/2 = 5 \text{ सेमी}$$

$$\text{आच्छादित भाग का क्षेत्रफल} = \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{आयत का क्षेत्रफल}$$

$$? = \frac{22}{7} \times 5^2 - 8 \times 6 = 78.57 - 48 = \mathbf{30.6cm^2}$$

$2m^2$ क्षेत्रफल वाले वर्ग में बनाए गए अंतवृत्त का क्षेत्रफल है -

$$a^2 = 2m^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}m \text{ then } r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$? = A = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}\pi = \mathbf{\frac{1}{2}\pi m^2}$$

एक घोड़े को खम्भे से रस्सी से बाँधा जाता है। यदि घोड़ा हमेशा रस्सी को खींचे हुए गोल घुमता है और 88 मीटर की दूरी तय करता है जब केन्द्र 72° का कोण अंतरित करता है, तो रस्सी की लम्बाई कितनी होगी -

घोड़ा वृत्ताकार मार्ग में परिधि पर 88 मीटर चलता है, अर्थात् 72 कोण से 88 मीटर चाप बनता है -

$$\text{चाप} = 2\pi r \times \frac{\theta}{360} \Rightarrow 88 = 2r \times \frac{22}{7} \times \frac{72}{360} \Rightarrow 1 = \frac{r}{70}$$

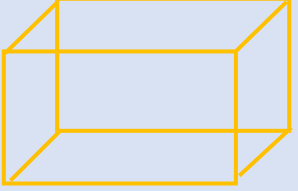
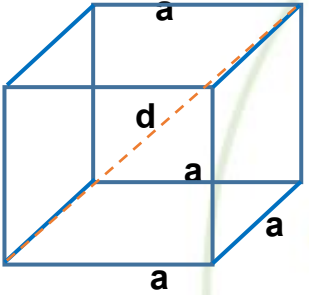
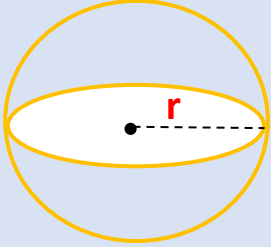
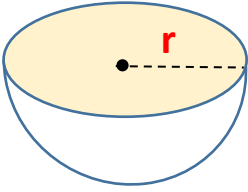
$$r = \mathbf{70 m} \text{ (रस्सी की लम्बाई त्रिज्या के बराबर होगी)}$$

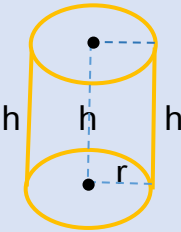
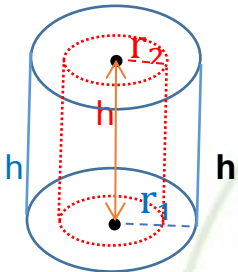
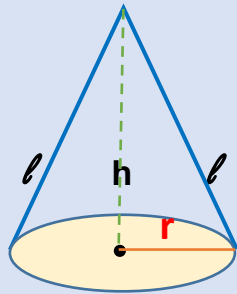
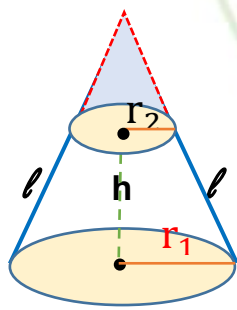
यदि किसी वर्ग के क्षेत्रफल को 44% बढ़ा दिया जाए, तो उसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई में वृद्धि होगी -

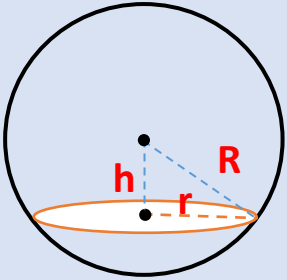
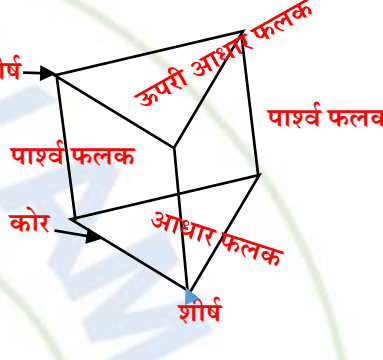
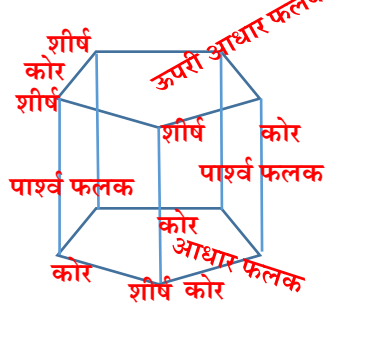

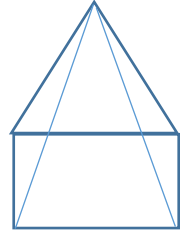
क्षेत्रफल	100	+44%	144
भुजा	10	?	12

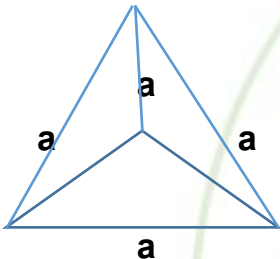
$$? \% = \frac{2}{10} \times 100\% = \mathbf{20\%}$$

[23] क्षेत्रमिति व आयतन, प्रिज्म व पिरामिड [Mensuration (3D)]

नाम	क्षेत्रफल	आयतन	शब्दावली
घनाभ	 <p>सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$ चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2bh + 2lh$ विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$</p>	$V = l \times b \times h$	l = लंबाई b = चौड़ाई h = ऊँचाई
घन	 <p>सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$ चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $4a^2$ सबसे लम्बी रखी जानी छड़ या विकर्ण $d = \sqrt{3} \cdot a$</p>	$V = a^3$	प्रत्येक भुजा = a लम्बाई = चौड़ाई = ऊँचाई
गोला	 <p>सम्पूर्ण पृष्ठ = $4\pi r^2$</p>	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$r =$ त्रिज्या
गोलाद्ध	 <p>वक्र पृष्ठ = $2\pi r^2$ सम्पूर्ण पृष्ठ = $3\pi r^2$</p>	$V = \frac{2}{3}\pi r^3$	$r =$ त्रिज्या

<p>लम्ब वृत्तीय बेलन</p>		<p>वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$ सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्र = $2\pi r(r + h)$</p>	<p>$V = \pi r^2 h$</p>	<p>ऊँचाई = h त्रिज्या = r</p>
<p>खोखला बेलन</p>		<p>वक्रपृष्ठ = $2\pi r_1 h + 2\pi r_2 h$ सम्पूर्ण पृष्ठ = $2\pi(r_1 + r_2)(h + r_1 - r_2)$ आयतन = $\pi(r_1^2 - r_2^2)h$</p>		<p>भीतरी रिक्त बेलन की त्रिज्या = r_1 संपूर्ण बेलन की त्रिज्या = r_2</p>
<p>शंकु</p>		<p>तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ वक्रपृष्ठ = $\pi r l$ सम्पूर्ण पृष्ठ = $\pi r(r + l)$</p>	<p>$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$</p>	<p>ऊँचाई = h तिर्यक ऊँचाई = l त्रिज्या = r</p>
<p>शंकु का छिन्नक</p>		<p>तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ आयतन = $\frac{1}{3} \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h$ वक्रपृष्ठ = $\pi(r_1 + r_2)l$ सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्र = $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)l$</p>		<p>r_1 = बड़ी त्रिज्या r_2 = छोटी त्रिज्या h = ऊँचाई</p>

गोला से समतल परिच्छेद		<p>गोलीय काट गोले की त्रिज्या से h दूरी पर है तब, गोलीय काट या समतल परिच्छेद की त्रिज्या</p> $r = \sqrt{R^2 - h^2}$	
प्रिज्म	<p>किसी बहुभुज जैसे - त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्भुज आदि के आधार बनाकर इनकी भुजाओं पर आयताकार फलकें लम्बवत् खड़ा करके उनके ऊपर आधार के सर्वांगसम बहुभुज का ढक्कन रखने से जो ठोस आकृति बनती है, उसे प्रिज्म कहते हैं।</p>		
प्रिज्म	<p>पार्श्व फलको की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या प्रिज्म में कुल फलकों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या + 2 कोरों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या \times 3 शीर्षों की संख्या = प्रिज्म के आधार में भुजाओं की संख्या \times 2 पार्श्व पृष्ठ = आयताकार पार्श्व फलकों का कुल क्षेत्रफल</p> <p>प्रिज्म का सम्पूर्ण पृष्ठ = पार्श्व पृष्ठ + दोनों सिरों का क्षेत्रफल या प्रिज्म का सम्पूर्ण पृष्ठ = पार्श्व पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल \times 2 प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल \times प्रिज्म की ऊँचाई</p>		
पिरामिड	<p>किसी बहुभुज जैसे - त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्भुज आदि के आधार बनाकर इनकी भुजाओं पर त्रिभुजाकार फलकें लम्बवत् खड़ा करके सभी फलकों के शीर्षक एक बिंदु पर मिलने से जो ठोस आकृति बने उसे पिरामिड कहते हैं।</p>		

<p>पिरामिड</p>	<p>तिरछी फलकों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या कुल फलकों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या + 1 तिरछी कोरों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या कुल कोरों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या × 2 तिरछी ऊँचाइयों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या</p>	<p>पिरामिड का तिरछा पृष्ठ = $\frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप \times तिरछी ऊँचाई सम्पूर्ण पृष्ठ = तिरछा पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल \times लम्बवत ऊँचाई</p>		
<p>सम चतुष्फलक</p>		<p>प्रत्येक कोर = a लम्बवत् ऊँचाई (h) = $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$ तिरछी ऊँचाई (l) = $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$</p>	<p>पार्श्व पृष्ठ (तिरछा पृष्ठ) = $\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$ सम्पूर्ण पृष्ठ = $\sqrt{3} a^2$</p>	<p>आयतन $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$</p>

यदि प्रत्येक ईंट का माप 25 सेमी × 11.25 सेमी × 6 सेमी हो, तो 8 मीटर लम्बी, 6 मीटर ऊँची तथा 22.5 सेमी मोटी एक दीवार के लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता पड़ेगी -

$$\begin{aligned} \text{ईंटों की संख्या}(n) \times \text{ईंट का आयतन} &= \text{दीवार का आयतन} \\ n \times 25\text{cm} \times 11.25\text{cm} \times 6\text{cm} &= 800\text{cm} \times 600\text{cm} \times 22.5\text{cm} \\ n &= \mathbf{6400} \end{aligned}$$

किसी आयताकार समान्तर षट्फलक के आयमो का जोड़ 24 सेमी है और विकर्ण की लम्बाई 15 सेमी है तो उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइये -

$$\begin{aligned} \text{आयताकार समान्तर षट्फलक का मतलब है घनाभ तब} \\ l + b + h &= 24\text{cm} \\ \sqrt{l^2 + b^2 + h^2} &= 15\text{cm} \Rightarrow l^2 + b^2 + h^2 = 225\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l + b + h)^2 &= l^2 + b^2 + h^2 + 2(lb + bh + hl) \\ 24^2 &= 225 + 2(lb + bh + hl) \Rightarrow 576 - 225 = 2(lb + bh + hl) \\ 2(lb + bh + hl) &= \mathbf{351\text{cm}^2} \end{aligned}$$

1 मी., 6 मी. तथा 8 मी. किनारे वाले 3 घन पिघलाकर एक घन में परिवर्तित किये गये हैं। तदनुसार उस नये घन की सतह का क्षेत्रफल कितना होगा -

$$\begin{aligned} \text{नये घन का आयतन} &= \text{पिघले सभी घनों का आयतन} \\ a^3 &= 1^3 + 6^3 + 8^3 = 1 + 216 + 512 = 729 \Rightarrow a^3 = 9^3 \\ &\Rightarrow a = 9\text{cm} \\ \text{सतहों का क्षेत्रफल} &= 6a^2 = 6 \times 9^2 = 6 \times 81 = \mathbf{486\text{cm}^2} \end{aligned}$$

एक लम्ब वृत्तीय बेलन और एक गोले की त्रिज्या बराबर है और आयतन बराबर है, उनके पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात है -

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{4}{3} \text{ then } ? = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} = \frac{h}{r} = \frac{4}{3} = 4 : 3$$

एक शंकु की त्रिज्या तथा ऊँचाई का अनुपात 4 : 3 है। तदनुसार उसकी वक्राकार सतह के क्षेत्रफल तथा कुल सतह के क्षेत्रफल का अनुपात कितना होगा-

$$\frac{\pi r(\sqrt{r^2 + h^2})}{\pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2})} = \frac{\sqrt{4^2 + 3^2}}{4 + \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{4 + 5} = \frac{5}{9}$$

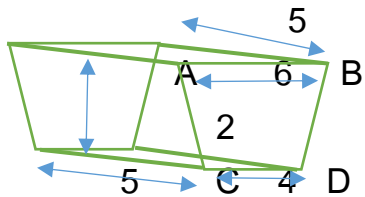
यदि 45 सेमी ऊँची किसी रुंडित शंकु बाल्टी के वृत्ताकार छोरों की त्रिज्याएँ 28 सेमी, तथा 7 सेमी हैं तो बाल्टी की धारिता है -

बाल्टी की धारिता = शंकु के छिन्नक का आयतन

$$V = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} (28^2 + 7^2 + 28 \cdot 7) 45$$

$$V = \frac{22}{7} \times 15(784 + 49 + 196) = \frac{330}{7} \times 1029 = 48510 \text{ cm}^3$$

जमीन में पानी की एक टंकी बनाई गई है जिसकी चौड़ाई ऊपर से 6 मीटर और तह में 4 मीटर है। यदि इस टंकी की लम्बाई ऊपर नीचे एक समान 5 मीटर है और गहराई 2 मीटर है तो टंकी की क्षमता होगी -



क्षमता = समांतर चतुर्भुज ABCD क्षेत्रफल × लंबाई

$$? = \frac{1}{2} \times (6 + 4) \times 2 \times 5 = 50 \text{ m}^3$$

यदि एक गोले का आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से समान है तो इसकी त्रिज्या है -

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3 \text{ Unit}$$

वृत्त की परिधि 4p है यदि इसकी परिधि 8p कर दी जाए, तो इसका क्षेत्रफल पहले का होगा -

एक विमीय परिधि 4p से 8p यानि दो गुनी हो जाती है, तो क्षेत्रफल द्विविमी = $2^2 = 4$ गुना हो जाएगा।

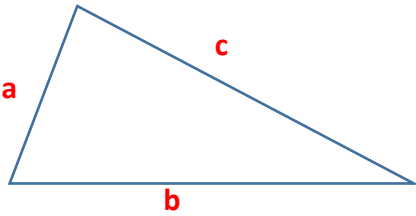
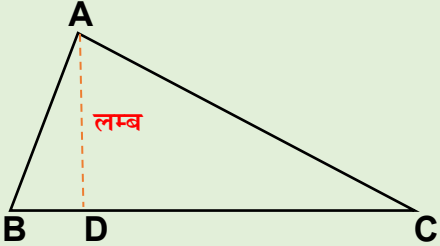
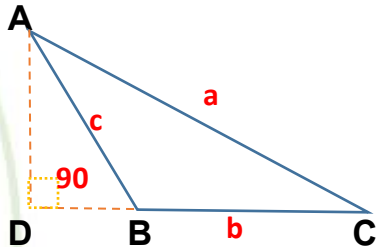
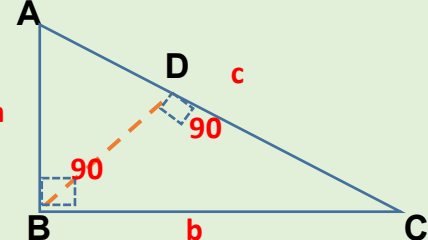
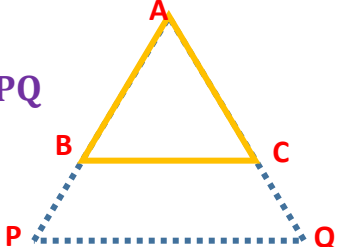
यदि एक समान्तर चतुर्भुज का बड़ा कोण, उसके छोटे कोण के दोगुने से 30° कम है तो समान्तर चतुर्भुज का सबसे बड़ा कोण है -

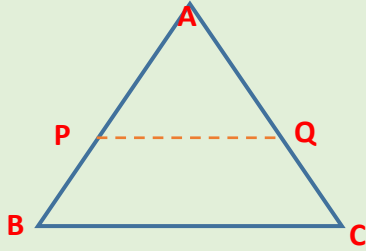
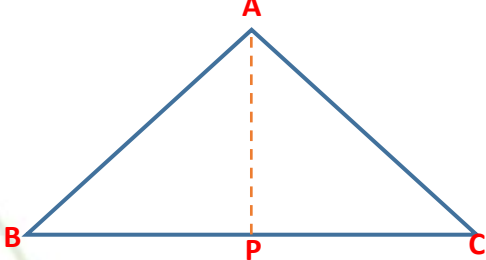
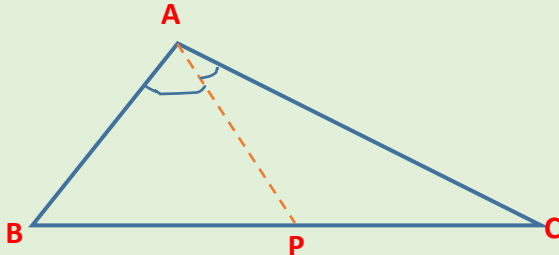
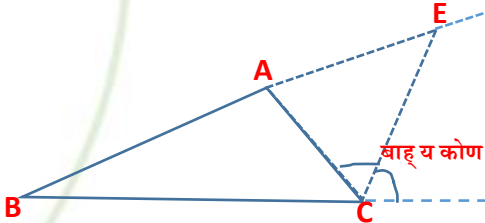
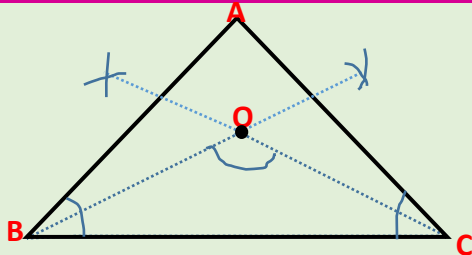
$$x + 2x - 30 = 180$$

$$3x = 210$$

$$x = 70^\circ$$

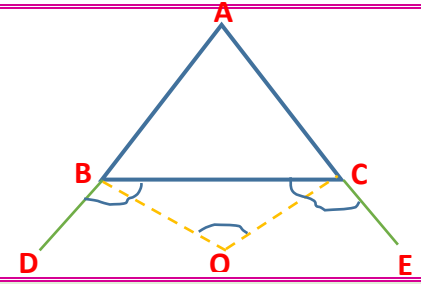
नाम / प्रमेय	विशेषताएं	चित्र
समानांतर रेखा	ऐसी रेखाएँ जिनके बीच की दूरी हमेशा समान हो और आपस में कभी न मिले।	
संगत कोण	<p>दो रेखाएं एक तिरछी रेखा द्वारा काटी जाए तो संगत कोण के चार युग्म बनते हैं।</p> $\angle AaE = \angle CbD \Rightarrow \angle 1 = \angle 5 \quad \& \quad \angle 2 = \angle 6$ $\angle 3 = \angle 7 \quad \& \quad \angle 4 = \angle 8$	
शीर्षाभिमुख कोण	<p>शीर्षाभिमुख कोण आपस में बराबर होते हैं।</p> $\angle 1 = \angle 2$ $\angle 3 = \angle 4$	
एकांतर कोण	<p>$\angle ABC$ और $\angle BCD$ एकांतर कोण है।</p> $\angle ABC = \angle BCD$	
त्रिभुज	<p>ऐसी आकृति जो तीन भुजाओं से मिलकर एक तल में तीन असंरेख बिंदुओं से मिलकर बनने वाला चित्र त्रिभुज होता है।</p> <p>त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।</p>	

<p>न्यून कोण त्रिभुज</p>	<p>न्यून कोण त्रिभुज का प्रत्येक कोण 90° से कम होता है। अथवा c^2 (बड़ी भुजा) $< a^2 + b^2$</p>	
<p>न्यून कोण त्रिभुज प्रमेय</p>	<p>किसी न्यून कोण त्रिभुज ABC में AD लम्ब $\angle A$ के सामने की भुजा पर डाला गया तो $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BD \cdot BC$</p>	
<p>अधिक कोण त्रिभुज</p>	<p>अधिक कोण त्रिभुज का कोई एक कोण 90 अंश से अधिक होता है। अथवा c^2 (बड़ी भुजा) $> a^2 + b^2$ यदि त्रिभुज ABC से AD लम्ब BC पर डाला जाए और BC को AD तक बढ़ाया जाए तो $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot BD$</p>	
<p>समकोण त्रिभुज</p>	<p>इस का एक कोण 90° होता है। और c^2 (बड़ी भुजा) $= a^2 + b^2$ समकोण त्रिभुज ABC में शीर्ष B से AC कर्ण पर लम्ब BD डाला जाए तो $BD = \frac{AB \times BC}{AC}$, $AD = \frac{AB^2}{AC}$, $CD = \frac{BC^2}{AC}$, $\frac{1}{BD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2}$</p>	
<p>थेलस प्रमेय</p>	<p>किसी त्रिभुज में किसी भुजा के समांतर रेखा खींचकर उसे अन्य भुजाओं को बढ़ा कर मिलाकर एक नया त्रिभुज बनाये तो दोनों त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं। $\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ}$ or $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$</p>	<p>$\triangle ABC \sim \triangle APQ$</p> 

<p>मध्य बिन्दु प्रमेय</p>	<p>त्रिभुज के दो संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दु को एक रेखा खण्ड द्वारा जोडा जोये तो यह रेखा खण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है यदि $AP = BP$, $AQ = CQ$ हो तो, $PQ \parallel BC$</p>	
<p>अपोलोनियस प्रमेय</p>	<p>किसी त्रिभुज में किन्ही दो भुजा के वर्गों का योग तीसरी भुजा की माध्यिका के वर्ग और तीसरी भुजा की आधे के वर्ग का दोगुना होता है।</p> $AB^2 + AC^2 = 2(AP^2 + BP^2) \therefore BP = CP$	
<p>समद्विभाजक आंतरिक कोण प्रमेय</p>	<p>यदि किसी त्रिभुज में कोण द्विभाजक विपरीत भुजा पर पड़ता है तो वह विपरीत भुजा को शेष दो भुजाओं के अनुपात में बाँटता है।</p> $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$	
<p>यदि त्रिभुज के बाह्य कोण का समद्विभाजक बाह्य कोण के सामने की भुजा को अन्य दो भुजाओं के साथ निम्न अनुपात में बाँटता है। तो</p> $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC}$		
<p>समद्विभाजक अंतः कोण प्रमेय</p>	<p>ΔABC में $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक O पर मिलते है तो</p> $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$	

समद्विभाजक
बाह्य कोण
प्रमेय

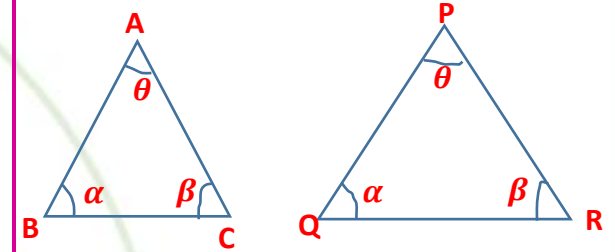
If ΔABC में **AB** और **AC** को क्रमश **D** और **E** तक बढ़ाया जाए और $\angle DBC$ तथा $\angle ECB$ समद्विभाजक **O** पर मिलते हैं तो

$$\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$


त्रिभुज की समरूपता

कोण समान
AAA

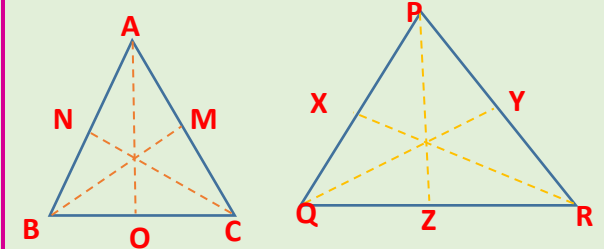
दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज के तीनों कोण, दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के अलग-अलग बराबर हों तो दोनों त्रिभुज परस्पर समरूप होंगे।

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$


माध्यिकाएं

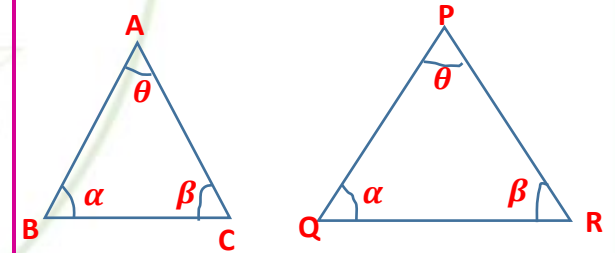
समरूप त्रिभुजों की संगत माध्यिकाएं समानुपाती होती हैं।

If $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ then $\frac{AO}{PZ} = \frac{BM}{QY} = \frac{CN}{RX}$



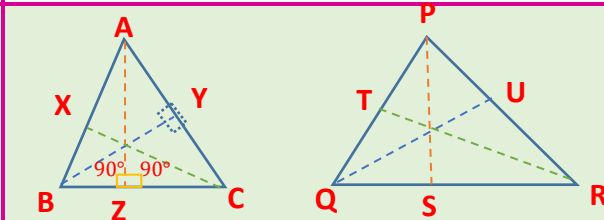
परिमाण

समरूप त्रिभुजों के परिमाण संगत भुजाओं के समानुपाती होते हैं।

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाण}}{\Delta PQR \text{ का परिमाण}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$


ऊँचाई

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के समानुपाती होते हैं।

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AZ^2}{PS^2} = \frac{BY^2}{QU^2} = \frac{CX^2}{RT^2}$$


<p>मध्य समान्तर रेखा</p>	<p>त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा (सम्मुख भुजा) के आधी और समान्तर होती है ।</p> <p>AB का मध्य बिन्दु X तथा AC का Y तब $XY = \frac{BC}{2}$ और $XY \parallel BC$</p> <p>AB का मध्य बिन्दु M तथा BC का N तब $MN = \frac{AC}{2}$ एवं $MN \parallel AC$</p>	
--------------------------	--	--

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (सर्वांगसमता = सर्व + अंग + सम)

<p>$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ तो</p>		
<p>पहले त्रिभुज की भुजाएं = दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाएं</p> <p>पहले त्रिभुज की माधिकाएं = दूसरे की संगत माधिकाएं</p> <p>पहले त्रिभुज का परिमाण = दूसरे का परिमाण</p>	<p>पहले त्रिभुज की ऊँचाइयां = दूसरे की संगत ऊँ.</p> <p>पहले त्रिभुज के कोण = दूसरे के संगत कोण</p> <p>पहले त्रिभुज का क्षेत्रफल = दूसरे का क्षेत्रफल</p>	

सिद्धान्त	सर्वांगसमता (त्रिभुज सर्वांगसम होंगे)	शब्दावली
BBB	यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाएं से अलग-अलग बराबर हो ।	B = त्रिभुज की भुजा
KB	यदि एक त्रिभुज के कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व एक भुजा के अलग-2 बराबरा हो ।	K = कर्ण
BAB	यदि दो भुजाएं व उनके मध्य कोण बराबर हो ।	A = कोण
AAB	यदि दो कोण व कोई एक भुजा संगत त्रिभुज से बराबर हो ।	

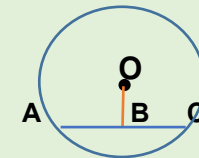
<p>माध्यिका</p>		<p>त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य बिन्दु को सामने शीर्ष से मिलाने वाली रेखा</p>
-----------------	--	---

<p>शीर्षलम्ब</p>		<p>त्रिभुज के किसी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर खींचा गया, लम्ब</p>
<p>लम्बार्धक</p>	<p>त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य बिन्दु पर खींचा गया लम्ब रेखा लम्बार्धक कहलाती है</p>	
<p>कोण अर्धक</p>	<p>त्रिभुज के किसी कोण को दो बराबर भागों में बाटने वाली रेखा</p>	
<p>केन्द्रक या गुरुत्व केन्द्र</p>	<p>त्रिभुज की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु (O) केन्द्रक हैं। केन्द्रक माध्यिकाओं का 2 : 1 के अनुपात में बाटता है। $\frac{AO}{OE} = \frac{CO}{OD} = \frac{BO}{OF} = \frac{2}{1}$ Small Traingle Area ($\Delta AOD/FOA/BOD/EOB/COE/COF$) = $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्र}}{6}$</p>	
<p>लम्ब केन्द्र</p>	<p>त्रिभुज के शीर्ष लम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु (O) $\angle BOC = 180^\circ - \angle A$ $\angle COA = 180^\circ - \angle B$ $\angle AOB = 180^\circ - \angle C$</p>	

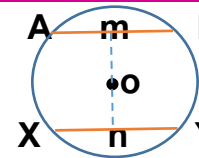
परिकेन्द्र	<p>त्रिभुज के लम्बार्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु (C)</p> $R = \frac{abc}{4\Delta} \text{ \& } 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ <p>Where R=परिकेन्द्र की त्रिज्या , a,b,c = Traingel Arms , Δ = Area</p>	
अन्तःकेन्द्र	<p>त्रिभुज के कोण अर्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु (I)</p> <p>अन्तः केन्द्र की त्रिज्या (r) = $\frac{\Delta \text{ (त्रिभुज का क्षेत्रफल)}}{s \text{ (अर्द्धपरिमाप)}}$</p>	
समबाहु त्रिभुज	<p>परिकेन्द्र की त्रिज्या (R) = $\frac{\text{भुजा}}{\sqrt{3}}$, अतः वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{\text{भुजा}}{2\sqrt{3}}$</p>	
वृत्त (Circle)		
वृत्त	<p>“किसी समतल में किसी स्थिर बिन्दु के चारों ओर नियत दूरी पर गतिशील बिन्दु का पथ”</p> <p>O = केन्द्र (वृत्त का मध्य बिन्दु) , $r = OA =$ त्रिज्या (केन्द्र से परिधि तक दूरी)</p> <p>PQ = व्यास (केन्द्र से होकर जाने वाली जीवा या रेखा जो परिधि को दोनों ओर सपर्श करें)</p> <p>परिधि = वृत्त का परिमाण = $2\pi r$, व्यास = $2 \times$ त्रिज्या</p>	
जीवा	परिधि पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा जीवा कहलाती हैं। सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।	
चाप	परिधि स्थित दो बिंदुओं के मध्य का भाग चाप कहलाता है, जैसे चित्र में AQ, AP चाप है। तथा $\angle AOQ, \angle AOP$ चाप का अंशमाप है।	
वृत्त खण्ड	वृत्त की जीवा वृत्त को दो खण्डों में बाटती है, बड़ा खण्ड दीर्घ वृत्तखण्ड व छोटा खण्ड लघु खण्ड कहते हैं।	

स्पर्श रेखा व छेदक रेखा	स्पर्श रेखा (AB) → वृत्त की परिधि को किसी एक बिन्दु पर स्पर्श करती छेदक रेखा (PQ) → वृत्त को छेदकर पार निकल कर वृत्त को दो भागों में बाँटती है	
चक्रीय चतुर्भज	वृत्त की परिधि पर चक्रीय चतुर्भज के चारों शीर्ष स्थित होते हैं।	
एकान्तर वृत्तखण्ड	स्पर्श बिन्दु B से एक स्पर्श रेखा ABC और एक जीवा BP खींची गयी है। अतः $\angle \alpha$ का एकान्तर वृत्तखण्ड BXPB तथा $\angle \beta$ का एकान्तर वृत्तखण्ड BYPB है।	
वृत्त संबंधी प्रमेय		चित्र
समतल में स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं से होकर जाने वाले अनन्त वृत्त खींचे जा सकते हैं।		
समतल में स्थित तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।		
वृत्त की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु से खींची गयी स्पर्श रेखा और उसी बिन्दु से खींची गयी त्रिज्या एक-दूसरे पर लम्ब होती हैं। स्पर्श रेखा = AC , त्रिज्या = OB तब $OB \perp AC$ & $\angle ABO = \angle CBO = 90^\circ$		

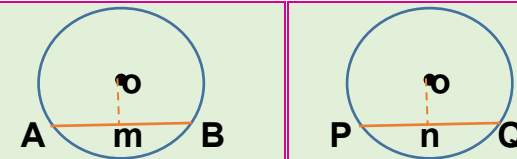
वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है ।
 $AC = \text{जीवा}$, $OB = \text{लम्ब (केन्द्र O से)}$ तब $AB = BC = AC/2$



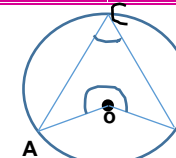
एक ही वृत्त में बराबर लंबाई की जीवाएं केन्द्र से बराबर दूरी पर स्थित होती हैं ।
 $AB = XY$, $mo = no$



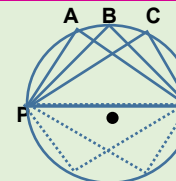
समान वृत्तों (सर्वांगसम वृत्तों) में बराबर जीवाएं केन्द्र से बराबर दूरी पर स्थिति होती हैं । जैसे -
 $AB = PQ$ then $om = on$



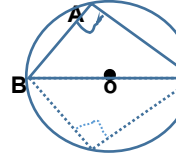
किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण शेष चाप पर बनाये गये कोण का दुगुना होता है ।
 $\angle AOB = 2 \times \angle ACB$



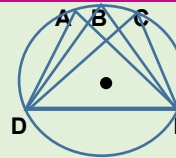
एक ही वृत्तखण्ड के कोण बराबर होते हैं ।
 वृत्तखण्ड में $\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PCQ$



अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है ।
 $\angle BAC = 90^\circ$

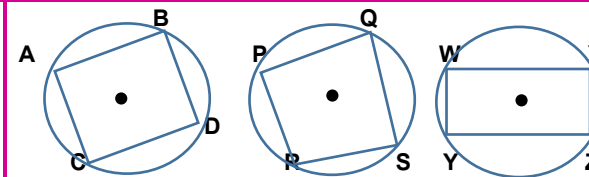


दीर्घ वृत्तखण्ड के कोण न्यूनकोण होते हैं । और लघु वृत्तखण्ड के कोण अधिककोण होते हैं ।
 $(\angle DAE = \angle DBE = \angle DCE) < 90^\circ$

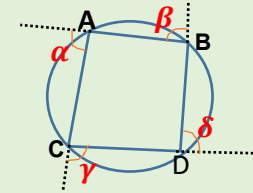


चक्रीय चतुर्भुज के कोण सम्पूरक (180°) होते हैं ।

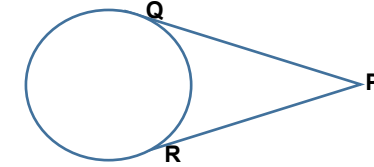
$$\begin{array}{lll} \angle A + \angle D = 180^\circ & \angle P + \angle S = 180^\circ & \angle W + \angle Z = 180^\circ \\ \angle C + \angle B = 180^\circ & \angle R + \angle Q = 180^\circ & \angle X + \angle Y = 180^\circ \end{array}$$



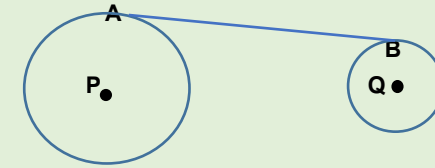
चक्रीय चतुर्भुज का बहिष्कोण अपने सम्मुख अन्तः कोण के बराबर होता है ।
 $\angle \alpha = \angle BDC, \quad \angle \beta = \angle ACD, \quad \angle \gamma = \angle ABD, \quad \angle \delta = \angle CAB$



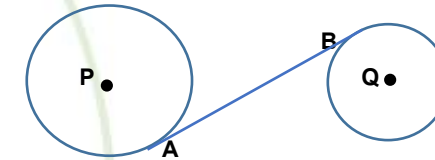
वृत्त से बाहर किसी बिन्दु से दो स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान होती है ।
 $PQ = PR$



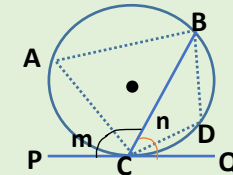
दो वृत्तों को उभयनिष्ठ रेखा (AB) स्पर्श करें तो
 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई = $\sqrt{\text{केन्द्रों के बीच की दूरी}^2 - \text{त्रिज्याओं का अन्तर}^2}$



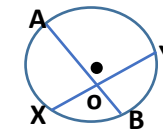
दो वृत्तों को उभयनिष्ठ तिर्यक रेखा (AB) स्पर्श करें तो
 उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की लम्बाई = $\sqrt{\text{केन्द्रों के बीच की दूरी}^2 - \text{त्रिज्याओं का योग}^2}$



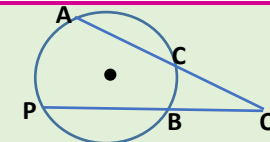
वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गयी जीवा और उसी बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा के बीच बना कोण अपने एकान्तर वृत्तखण्ड के कोण के बराबर होता है ।
 $\angle m = \angle CAB, \quad \angle n = \angle CDB$



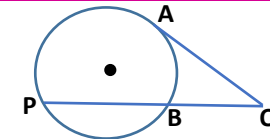
$$AO \times BO = YO \times XO$$



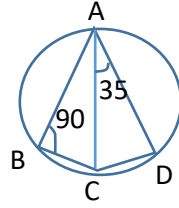
$$PQ \cdot BQ = AQ \cdot CQ$$



$$AQ^2 = PQ \cdot BQ$$



चित्र में, $\angle ABC = 95^\circ$ और $\angle DAC = 35^\circ$
तो $\angle ACD$ की माप ज्ञात कीजिए -



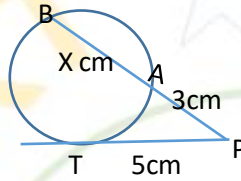
ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तब

$$\angle CDA + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow \angle CDA = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$

$$\text{In } \triangle ACD, \angle ACD + 35^\circ + 85^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$$

चित्र में, PAB एक रेखाखण्ड तथा PT स्पर्श रेखा है।

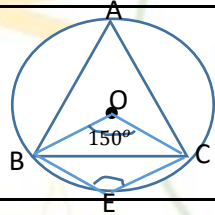
यदि X की लम्बाई ज्ञात कीजिए -



$$PT^2 = PB \cdot PA \Rightarrow 5^2 = (x + 3) \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3} = 5.3 \text{ cm}$$

चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है। $\angle BEC$ की

माप ज्ञात कीजिए -



$$\angle BAC = \frac{150}{2} = 75^\circ \text{ क्योंकि चाप कोण केन्द्र कोण का आधा}$$

चतुर्भुज ABCE चक्रीय चतुर्भुज है तब,

$$\angle BAC + \angle BEC = 180^\circ \Rightarrow \angle BEC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

चित्र में, 10 सेमी व्यास वाले तीन वृत्त एक रबड़-बैंड से जोड़ दिए हैं। दिखाए अनुसार उस पूरे खींचे हुए रबड़-बैंड की लम्बाई कितने सेमी हैं -



चित्रानुसार, प्रत्येक वृत्त को रबड़-बैंड उसके परिधि का एक तिहाई भाग

टच करती हैं और दो वृत्तों के मध्य रबड़-बैंड की दूरी दो वृत्तों के केन्द्र के बीच की दूरी के बराबर हैं, तब

$$? = \frac{2\pi \cdot 5}{3} + \frac{2\pi \cdot 5}{3} + \frac{2\pi \cdot 5}{3} + 10 + 10 + 10 = 30 + 10\pi \text{ cm}$$

यदि ABC त्रिभुज के अंतःवृत्त का केन्द्र O हो और $\angle BOC = 110^\circ$ हो, तो $\angle BAC$ का मान कितना होगा

समद्विभाजक अंतः कोण प्रमेय से,

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} \Rightarrow 110^\circ = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} \Rightarrow \frac{\angle BAC}{2} = 20^\circ \Rightarrow \angle BAC = 40^\circ$$

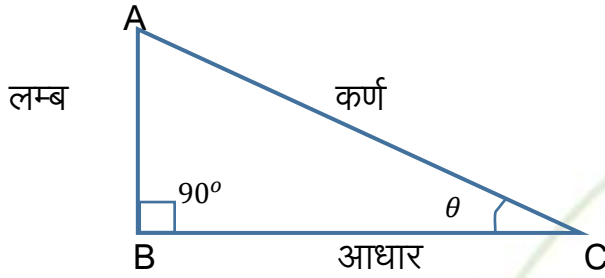
एक समकोण त्रिभुज में समकोण की निकटवर्ती भुजाएं 3 सेमी तथा 4 सेमी लंबी है। तदनुसार, लंब केन्द्र तथा परिकेन्द्र के बीच की दूरी कितनी होगी -

समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र = कर्ण का मध्य बिन्दु
समकोण त्रिभुज का लम्ब केन्द्र = समकोण वाला शीर्ष

$$\text{कर्ण} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

$$? = \text{तीनों शीर्षों की मध्य बिंदु से दूरी} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ cm}$$

किसी समकोण त्रिभुज की भुजाओं और कोणों से संबन्धित माप को त्रिकोणमिति कहते हैं।



लम्ब, कर्ण, आधार में सम्बंध (पाइथागोरस प्रमेय से) –

$$(कर्ण)^2 = (लम्ब)^2 + (आधार)^2$$

कुल छः त्रिकोणमिति अनुपात हैं – sin, cos, tan, cot, sec, cosec

त्रिकोणमिति अनुपातों के मान –

$\frac{LAL}{KKA}$			$\frac{KKA}{LAL}$		
sinθ	cosθ	tanθ	cosecθ	secθ	cotθ
$\frac{L}{K}$	$\frac{A}{K}$	$\frac{L}{A}$	$\frac{K}{L}$	$\frac{K}{A}$	$\frac{A}{L}$
L = लम्ब		A = आधार		K = कर्ण	

समकोण त्रिभुज की भुजाएं –

लम्ब या आधार		कर्ण	लम्ब या आधार		कर्ण
3	4	5	5	12	13
6	8	10	7	24	25
8	15	17	9	40	41
20	21	29	15	20	25

महत्वपूर्ण फॉर्मूला –

$\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$	
$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$		
$\sin(90 - \theta) = \cos\theta$	$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$	
$\tan(90 - \theta) = \cot\theta$	$\cot(90 - \theta) = \tan\theta$	
$\sec(90 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}(90 - \theta) = \sec\theta$	
$a\sin\theta + b\cos\theta = c$ Then $b\sin\theta - a\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$		
If $\sec\theta + \tan\theta = x$ Then $\sec\theta - \tan\theta = \frac{x^2 + 1}{2x}$		
if $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$ Then $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{x^2 + 1}{2x}$		

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$= \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \cdot \tan B}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\sin 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{C+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

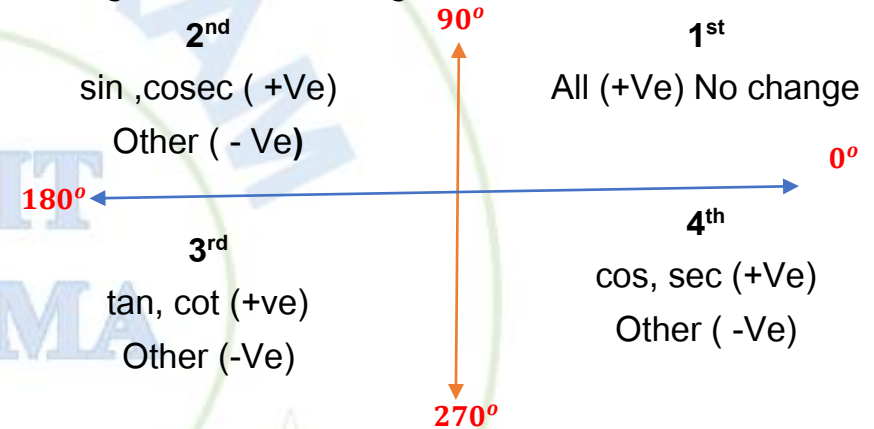
$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\sin\theta \cdot \sin(60 - \theta) \cdot \sin(60 + \theta) = \frac{1}{4} \sin 3\theta$$

$$\cos\theta \cdot \cos(60 - \theta) \cdot \cos(60 + \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

$$\tan\theta \cdot \tan(60 - \theta) \cdot \tan(60 + \theta) = \tan 3\theta$$

अक्षों के अनुसार त्रिकोणमिति अनुपातों के मान -



(90°, 270°) के साथ अनुपात व चिह्न भी बदलते हैं और (180°, 360°) के साथ केवल चिह्न बदलते हैं -

$$\sin \longleftrightarrow \cos \quad \text{Ex. } \sin(90 \pm \theta) = \cos\theta$$

$$\tan \longleftrightarrow \cot \quad \text{Ex. } \sin(270 \pm \theta) = -\cos\theta$$

$$\sec \longleftrightarrow \text{cosec} \quad \text{Ex. } \cos(270 \pm \theta) = \sin\theta$$

चिन्ह बदलने के लिए ये देखना जरूरी है जब किसी कोण को जोड़ते या घटाते समय वह त्रिकोणमिति अनुपात किस चतुर्थास में पहुँच रहा है।

जैसे – $\sin 150 = \sin(180 - 30) = \sin 30 = 1/2$

$\sin(90+60)=\cos 60 = 1/2$

$\cos 150 = \cos(180 - 30) = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 150 = \cos(90 + 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

कोण	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
0°	1	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0	∞	1
15°	$\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\frac{1}{\sin\theta}$

$22\frac{1}{2}^\circ$	$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$	“	“	“	“
18°	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{2}}}{4}$	“	“	“	“
36°	$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{2}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$	“	“	“	“
75°	$\cos(90 - 15) = \cos 15^\circ$	$\sin 15^\circ$	“	“	“	“

अधिकतम (Maxima) & न्यूनतम (Minima) –

त्रिकोणमिति	घात	Maxima	Minima
$\sin\theta, \cos\theta$	विषम	-1	+1
$\sin^2\theta, \cos^2\theta$	सम	0	+1
$\tan\theta, \cot\theta$	विषम	$-\infty$	$+\infty$
$\tan^6\theta, \cot^4\theta$	सम	0	$+\infty$
$\sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$	विषम	$-\infty$	$+\infty$
$\sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$	सम	+1	$+\infty$
$a\sin^2\theta + b\cos^2\theta$		Smaller a & b	Largest a & b
$\sin^n\theta \cdot \cos^n\theta$	n विषम	$-\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}$

$\sin^n \theta \cdot \cos^n \theta$	n सम	0	$\frac{1}{2^n}$
$a \sin \theta + b \cos \theta$		$-\sqrt{a^2 + b^2}$	$+\sqrt{a^2 + b^2}$
$a \tan^2 \theta + b \cot^2 \theta$		$2\sqrt{ab}$	∞
$a \sin^2 \theta + b \operatorname{cosec}^2 \theta$	a > b	$2\sqrt{ab}$	
	a < b	a + b	

रेडियन को अंश में बदलना -

$$\pi = 180^\circ$$

$$60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

If $\sin(19^\circ 10' 30'') = x$ then $\cos(70^\circ 50' 30'')$ + $\tan(19^\circ 10' 30'')$

$$\begin{aligned} \cos(70^\circ 50' 30'') &= x \quad \because \sin(90 - \theta) = \cos \theta \\ \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ \cos(70^\circ 50' 30'') + \tan(19^\circ 10' 30'') &= x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

If $\sec \theta = \frac{13}{5}$ then $\frac{2 \sin \theta - 3 \cos \theta}{4 \sin \theta - 9 \cos \theta}$

$$\sec \theta = \frac{13}{5} = \frac{K}{A}, \quad L = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \theta - 3 \cos \theta}{4 \sin \theta - 9 \cos \theta} &= \frac{2 \cdot \frac{L}{K} - 3 \cdot \frac{A}{K}}{4 \cdot \frac{L}{K} - 9 \cdot \frac{A}{K}} = \frac{2 \cdot \frac{12}{13} - 3 \cdot \frac{5}{13}}{4 \cdot \frac{12}{13} - 9 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{24 - 15}{48 - 45} \\ &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta}$ का मान क्या होगा -

$$\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{\sec \theta - \tan \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} = \sec \theta - \tan \theta$$

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 9^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$$

$$\begin{aligned} &\sin^2 1^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 9^\circ + \dots \\ &\quad + \sin^2 45^\circ + \sin^2 49^\circ \dots + \sin^2 89^\circ \\ &= \sin^2 1^\circ + \dots + 1 + \dots + \cos^2 1^\circ \\ \text{Total Term} &= 23, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ वाली पद } 11 \text{ एक मध्य पद} \\ &\sin 45 \text{ तब} \end{aligned}$$

$$= 11 + \frac{1}{2} = 11 \frac{1}{2}$$

$\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ का मान है -

$$\begin{aligned} &\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ \\ &= \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 45^\circ \dots \cot 2^\circ \cdot \cot 1^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\cos 52^\circ + \cos 68^\circ + \cos 172^\circ = ?$$

$$\begin{aligned} ? &= \cos 52^\circ + \cos 68^\circ + \cos 172^\circ \\ &= 2 \cos \frac{172^\circ + 52^\circ}{2} \cdot \cos \frac{172^\circ - 52^\circ}{2} + \cos 68^\circ \\ &= 2 \cos 60^\circ \cos 112^\circ + \cos 68^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times \frac{1}{2} \times \cos 112^\circ + \cos 68^\circ \\
 &= \frac{2 \cos(112^\circ + 68^\circ)}{2} \times \frac{\cos(112^\circ - 68^\circ)}{2} \\
 &= 2 \cos 90^\circ \times \cos 22^\circ \quad (\because \cos 90^\circ = 0) \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{3}{5} = \frac{A}{K}, \text{ then } L = 4 \\
 ? &= \frac{\sin \theta - \cot \theta}{2 \tan \theta} = \frac{\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right)}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{1}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{160}
 \end{aligned}$$

$\cos \theta + \sin \theta$ का मान महत्तम होगा, -

Put, $\theta = 45^\circ$ at value = $1 + 1 = 2$ (max)

[$\sin x + \cos x$]

a) $\geq \sqrt{2}$

b) $\leq \frac{1}{2}$

c) $\leq \sqrt{2}$

d) None Of These

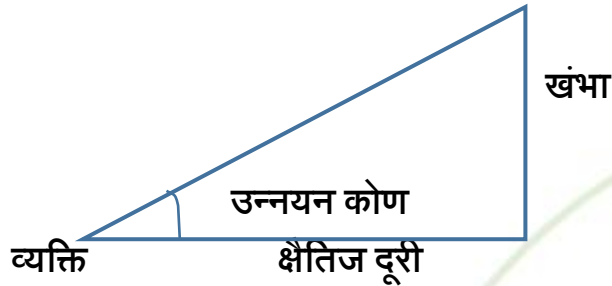
$$(a \sin \theta + b \cos \theta)_{\max} = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(a \sin \theta + b \cos \theta)_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(\sin x + \cos x)_{\text{value}} = \pm \sqrt{1^2 + 1^2} = \pm \sqrt{2} = \leq \sqrt{2}$$

If $\cos \theta = \frac{3}{5}$, then $? = \frac{\sin \theta - \cot \theta}{2 \tan \theta}$

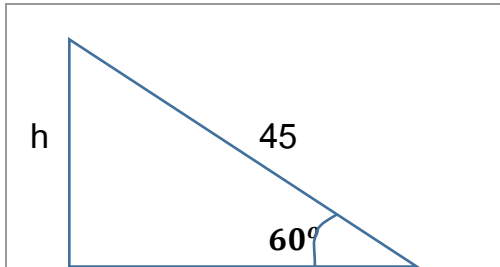
जब कोई व्यक्ति किसी ऊँचाई की ओर जिस कोण से देखता है, उसे उन्नयन कोण कहते हैं।



जब कोई व्यक्ति किसी ऊँचाई से क्षैतिज की ओर जिस कोण से देखता है, उसे अवगमन कोण कहते हैं।



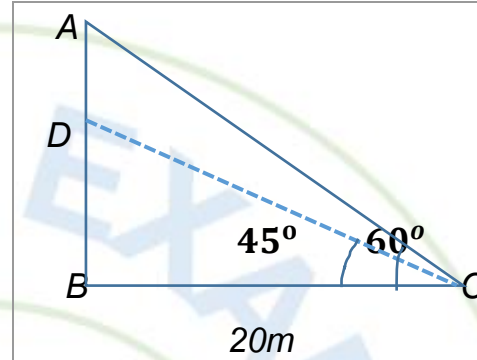
एक सीढ़ी, जिसकी लम्बाई 45 मीटर है, किसी मीनार के शीर्ष को स्पर्श करती है तथा क्षैतिज से 60° का कोण बनाती है। मीनार की ऊँचाई होगी -



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{45} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{45}$$

$$\Rightarrow h = \frac{45\sqrt{3}}{2} \text{ मी०}$$

किसी मीनार की चोटी पर एक झण्डा लगा है। मीनार के आधार से 20 मीटर की दूरी से मीनार और झण्डे के शिखर के उन्नयन कोण की क्रमशः 45°, 60° है, झण्डे की ऊँचाई है -



$$\text{In } \triangle DBC, \tan 45^\circ = \frac{DB}{20}$$

$$1 = \frac{DB}{20} \Rightarrow DB = 20m$$

$$\text{In } \triangle ABC, \tan 60^\circ = \frac{AB}{20}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{20} \Rightarrow AB = 20\sqrt{3}$$

$$? = AD = AB - DB$$

$$= 20\sqrt{3} - 20$$

$$= 20(\sqrt{3} - 1) \text{ मी०}$$

एक खम्भे की परछाई की लंबाई को उसकी ऊँचाई का $\sqrt{3}$ गुना कर दिया जाए तो सूर्य का उन्नयन कोण कितना होगा -

खम्भे की परछाई का सूर्य से उन्नयन कोण = θ

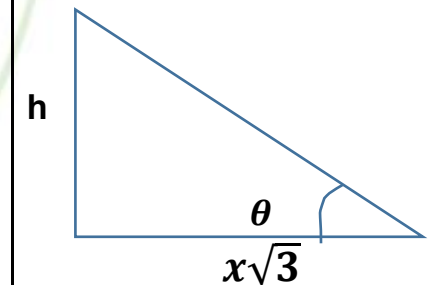
खम्भे की ऊँचाई = h

खम्भे की परछाई = $h\sqrt{3}$

$$\tan \theta = \frac{h}{h\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

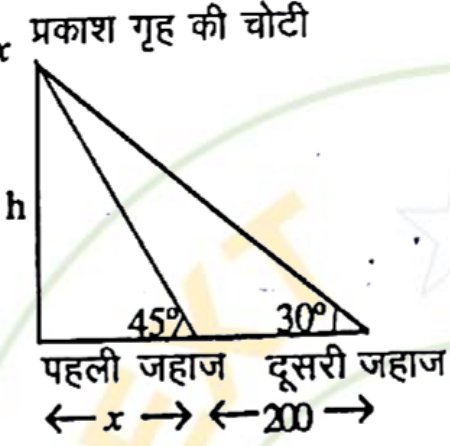
$\tan \theta = \tan 30^\circ$

$\theta = 30^\circ$

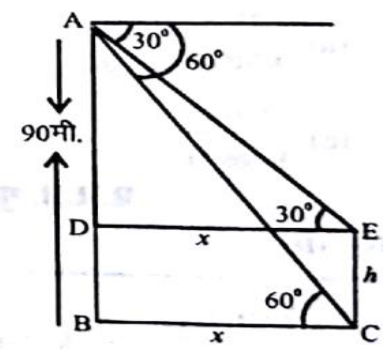


प्रकाश-गृह की चोटी से जहाजों का अवनमन कोण पूर्व की ओर 45° तथा 30° के हैं। यदि दोनों जहाज 200 मीटर की दूरी पर हैं तो प्रकाश - गृह की ऊँचाई ज्ञात कीजिए -

$\tan 45 = \frac{h}{x} \Leftrightarrow 1 = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = x$ प्रकाश गृह की चोटी
 $\therefore \tan 30 = \frac{h}{x+200}$
 $\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{h+200} \Rightarrow \sqrt{3}$
 $\therefore h = h + 200$
 $h(\sqrt{3}-1) = 200$
 $\therefore h = \frac{200}{\sqrt{3}-1} = \frac{200(\sqrt{3}+1)}{3-1} \Rightarrow \frac{200(1.732+1)}{2}$
 $= 100 \times 2.732 \Rightarrow 273.2$ मी



एक पहाड़ी, जिसकी ऊँचाई 90 मीटर है। एक मीनार के शीर्ष और अधस्तल के नतिकोण क्रमशः 30° और 60° अंश हैं, तो मीनार की ऊँचाई क्या है -



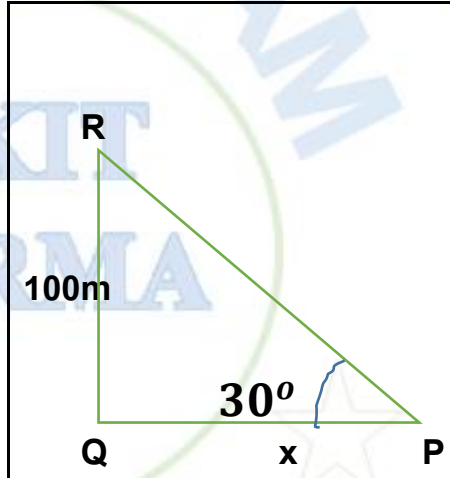
In $\triangle ADE$, $\frac{AD}{DE} = \tan 30^\circ \Rightarrow 90 - h = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$x = (90 - h)\sqrt{3}$

In $\triangle ABC$, $\frac{90}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow x = 30\sqrt{3}$

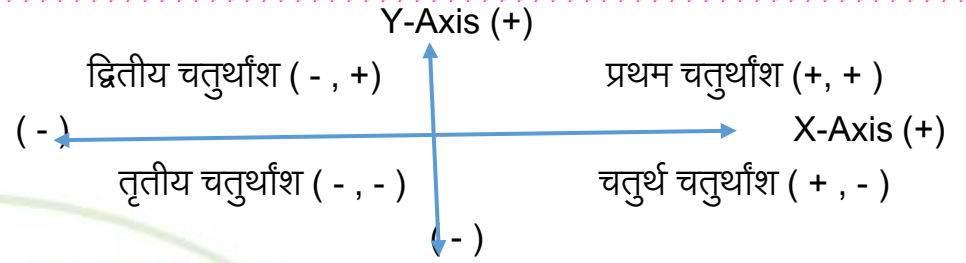
$\Rightarrow (90 - h)\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \Rightarrow h = 90 - 30 = 60m$

एक समतल मैदान पर बिन्दु P से एक टॉवर के शीर्ष के एलिवेशन का कोण 30° है। यदि टॉवर की ऊँचाई 100 मीटर है तो बिन्दु P की टॉवर के पैरों से लगभग दूरी होगी -



$\tan 30^\circ = \frac{100}{x}$
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{x}$
 $x = 100\sqrt{3}$
 $= 100 \times 1.73$
 $= 173 m$

गणित की वह शाखा , जिसमें किसी बिन्दु या रेखा की स्थिति को दो अंको द्वारा निर्देशित किया जाता है, इन दोनों अंको जैसे (x, y) को निर्देशांक कहते हैं। पहला अंक भुज (x) तथा दूसरा अंक कोटि (y) कहलाता है।

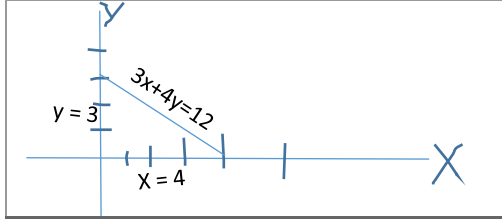


Name	Quality	Shape	Formula
दो बिन्दुओं के बीच की दूरी	दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी (d)		$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Example :	बिन्दु (4, 4) , (3, 2) के बीच की दूरी है - $(x_1 = 4, y_1 = 4), (x_2 = 3, y_2 = 2)$ then $d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ Unit		
मध्य बिन्दु	दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ का मध्य बिन्दु (M) के निर्देशांक हैं।		$M(x,y) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{(y_1 + y_2)}{2}$
विभाजन	दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को बिन्दु $P(x, y), m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित करते हैं।		$P(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$
	दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को बिन्दु $P(x, y), m_1 : m_2$ में बाह्यतः विभाजित करते हैं।		$P(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2} \right)$
सरल रेखा	दो बिन्दुओं A व B को मिलाने वाली रेखा या दो ऐसे बिन्दु जो रेखा पर हो। $ax + by + c = 0$ (सरल रेखा का सामान्य समी०)		$(y - y_1) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$
प्रवणता	जब दो बिन्दुओं के निर्देशांक दिए जाए तो प्रवणता ज्ञात करना		रेखा की प्रवणता (m) $m = \tan\theta = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$

			एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समी० $(y - y_1) = m(x - x_1)$
क्षैतिज एवं उर्ध्वाधर	क्षैतिज रेखा x-अक्ष से 'a' दूरी पर है। तब ,		x-अक्ष के समान्तर हो, तब $y = a$ Or $y = -a$
	उर्ध्वाधर रेखा y-अक्ष से 'b' दूरी पर है। तब,		Y-अक्ष के समान्तर हो तब $x = b$ Or $x = -b$
रेखा का प्रवणता रूप	रेखा Y-अक्ष से m ढाल पर मूल बिन्दु से c दूरी पर है।		रेखा का समी० $y = mx + c$
रेखा का अन्तः खण्ड रूप	रेखा, X-अक्ष को a पर काटती है, तथा बिन्दु (a,0) और Y-अक्ष को b बिन्दु पर (0,b) अन्तः खण्ड काटती है।		रेखा का समी० $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ Or $bx + ay = ab$
दो रेखाओं के बीच का कोण	यदि दो रेखाएं एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनके बीच कोण बनता है।		$m_1 = \tan \alpha_1, m_2 = \tan \alpha_2$ $\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$
समान्तर होने का प्रतिबन्ध	यदि दो रेखाएँ समान्तर हैं तो उनके झुकाव समान होते हैं।		$m_1 = m_2 \Rightarrow \tan \alpha = \tan \beta$ $L_1 = a_1x + b_1y + c$ & $L_2 = a_2x + b_2y + c$ समान्तर होने के लिए, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$
लम्ब होने का प्रतिबन्ध	यदि दो रेखाएं लम्ब हैं तो उनके ढाल एक-दूसरे के ऋणात्मक व्युत्क्रम होते हैं।		$m_1 \cdot m_2 = -1$ $a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

रेखा पर डाले गये लम्ब की माप	रेखा $ax+by+c=0$ पर बिन्दु (x_1, y_1) से डाले गये लम्ब की माप		$PN = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
मूल बिन्दु से रेखा की दूरी	रेखा $ax+by+c=0$ पर मूल बिन्दु $(0,0)$ से डाले गये लम्ब की माप		$ON = \frac{ c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी	दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी हमेशा नियत रहती है।		$MN = \frac{ c_1 - c_2 }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
त्रिभुज का क्षेत्रफल	ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल		$\Delta = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$
त्रिभुज के केन्द्रक	केन्द्रक यदि बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ शीर्षों के निर्देशांक है तो उनके केन्द्रक के निर्देशांक		केन्द्रक के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$
अन्तः केन्द्र :	यदि त्रिभुज में भुजाये a, b, c है, तथा शीर्ष A, B, C के क्रमशः निर्देशांक $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ है।		$\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c} \right)$
परिकेन्द्र	यदि त्रिभुज में भुजाये a, b, c है, तथा शीर्ष A, B, C के क्रमशः निर्देशांक $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ है।		$\left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right)$

समी० $x = 4$, $y = 3$ और $3x + 4y = 12$ के तीन ग्राफों से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है -

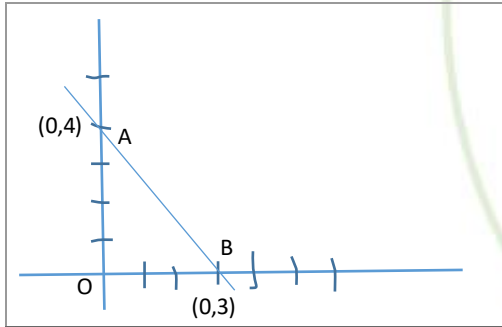


$$\text{क्षे०} = \frac{\text{लम्ब} \times \text{आधार}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

यदि बिन्दु $(3, -4)$, $(1, -2)$ तथा (x, y) संरेख हो तो समी० बनेगा -

$$\begin{aligned} x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) &= 0 \\ 3(-2 - y) + 1(y + 4) + x(-4 + 2) &= 0 \\ -6 - 3y + y + 4 - 4x + 2x &= 0 \Rightarrow -2x - 2y - 2 = 0 \\ \Rightarrow x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

X-अक्ष, Y-अक्ष और $4x + 3y = 12$ से बने त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या हैं -



X-Axis $y=0$
Y-Axis $x=0$
 $4x+3y=12$ then $(0,4)$ or $(3,0)$
अतः समकोण त्रिभुज AOB बनेगा
 $R = \text{कर्ण} / 2 = 5/2 = 2.5 \text{ Unit}$

बिन्दुओं $(2, -4)$ तथा $(-3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा को x - अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है -

माना दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को बिन्दु $P(x, y)$, $m_1 : m_2$ में बाह्यतः विभाजित करते हैं।

$$A(x_1, y_1) = (2, -4) \& B(x_2, y_2) = (-3, 6) \quad P(x, y) = (x, 0) \because x - \text{Axis}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2} = y = 0 &\Rightarrow \frac{m_1 6 - m_2 (-4)}{m_1 - m_2} = 0 \Rightarrow 6m_1 \\ &= 4m_2 \Rightarrow m_1 : m_2 = 2 : 3 \end{aligned}$$

यदि $2x + y - c = 0$ मूल बिन्दु से गुजरती हो, तो c का मान होगा -

मूल बिन्दु के निर्देशांक $(0, 0)$ तब

$$2x + y - c = 0 \rightarrow 2 \times 0 + 0 - c = 0 \rightarrow c = 0$$

K का मान जिसके लिए $(k-1)x + y - 2 = 0$ और $(2-k)x - 3y + 1 = 0$ के ग्राफ समांतर हैं -

$$\text{समान्तर होने के लिए, } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{k-1}{2-k} = \frac{1}{-3}$$

$$\Rightarrow -3k + 3 = 2 - k \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

रेखा $x \sin \theta + y \cos \theta = \sin 2\theta$ तथा अक्षों से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल है -

$$\begin{aligned} x \sin \theta + y \cos \theta = \sin 2\theta &\Rightarrow \frac{x \sin \theta}{2 \sin \theta \cdot \cos \theta} + \frac{y \cos \theta}{2 \sin \theta \cdot \cos \theta} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{2 \cos \theta} + \frac{y}{2 \sin \theta} = 1 \end{aligned}$$

अतः कटान बिंदु $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ जिससे आधार व ऊँचाई भी यही होंगे तब,

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \sin 2\theta$$

क्रमगुणित (Factorial) : लगातार 1 से लेकर n तक की संख्याओं का गुणनफल को क्रमगुणित कहते हैं। संकेत $n!$ या $n!$

$$n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ex. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

क्रमचय (Permutation) : क्रमचय का अर्थ – विभिन्न क्रमों में सजाना।

(क) n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की

$$\text{संख्या} = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

8 रंगों की माला हैं। इनमें से 5 माला कितने प्रकार से ली जा सकती हैं-

$$\text{हल : } {}^8P_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

(ख) n वस्तुओं के समूह में सभी वस्तुओं को एक साथ लेने पर, जिसमें एक प्रकार की वस्तुओं की संख्या p, दूसरे प्रकार की वस्तुओं की संख्या q तथा तीसरे प्रकार की वस्तुओं की संख्या r हो, तो n वस्तुओं के क्रमचयों की

$$\text{संख्या} = \frac{n!}{p!q!r!}$$

शब्द 'PAPAYA' के अक्षरों को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है -

हल : PAPAYA में कुल 6 अक्षर हैं, और सभी असमान नहीं बल्कि P के 2, A के 3 अक्षर समान हैं, तब,

$$\text{क्रमचयों की संख्या} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 60$$

(ग) n असमान वस्तुओं में r वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या जबकि प्रत्येक वस्तु क्रमचय में r बार आ सकती है $= n^r$

अंक 1, 2, 3, 4, 5 से तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि किसी भी संख्या में अंक कितनी बार पुनरावृत्त हो सकते हैं -

हल : तीन अंकों की संख्या में प्रत्येक अंक तीन बार पुनरावृत्त हो सकता है। अंकों की संख्या $n = 6$, (Repeat) $r = 3$

$$? = n^r = 6^3 = 216$$

चक्रीय क्रमचय :

A. यदि वामावर्त एवं दक्षिणावर्त क्रम असमान हो, तो n असमान वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $= (n-1)!$

8 व्यक्तियों के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $= (8-1)! = 7! = 5040$

B. यदि वामावर्त एवं दक्षिणावर्त क्रम समान हो, तो n असमान वस्तुओं के वृत्तीय

$$\text{क्रमचयों की संख्या} = \frac{(n-1)!}{2}$$

हार में 8 फूलों के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $= \frac{(8-1)!}{2} = \frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$

संचय (Combination) : संचय का अर्थ है चुनाव (बिना क्रम ध्यान रखते हुए)

n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं को चुन सकते हैं -

$$\text{संचयों की संख्या} = C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

8 पुरुषों में से 4 पुरुषों की एक टोली बनानी है, यह कितने प्रकार से संभव है -

$$? = 8C_4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$$

महत्वपूर्ण तथ्य -

यदि किसी कार्य W के दो खंड A और B हों, जिनमें A, m तरीके से तथा B, n तरीके से सम्पन्न हो सकते हैं जो यदि

- (क) W सम्पन्न करने के बिना A और B एक साथ सम्पन्न करना हो तो कार्य W करने के लिए कुल $m \times n$ तरीके होंगे।
 (ख) W सम्पन्न करने के लिए A या B दोनों में से किसी एक को सम्पन्न करना हो तो कार्य W करने के $m + n$ तरीके होंगे।

महत्वपूर्ण सवालों के हल :

एटा शहर में 2 पार्सल करने के लिए अंकित पास 7 डाकखाने हैं। बताइये अंकित कितने प्रकार से पार्सलों की रजिस्ट्री कर सकता है -

पहला पार्सल को रजिस्ट्री करने के तरीके = 7
 दूसरे पार्सल को रजिस्ट्री करने के तरीके = 7
 इसी प्रकार तीसरे पार्सल (सभी एक साथ) को रजिस्ट्री करने के तरीके = 7
 अभीष्ट तरीके = $7 \times 7 \times 7 = 343$

अनुज को अपने 7 मित्रों को निमंत्रण देना है, अनुज के पास निमंत्रण-पत्र भेजने के लिए 3 नौकर हैं, तो अनुज कितने ढंग से निमंत्रण -पत्र भेज सकता है -

प्रत्येक मित्र को अलग - अलग 3 नौकरों से निमंत्रण भेजने के ढंग = 3
 तब सातों मित्रों को निमंत्रण भेजने के
 अभीष्ट ढंग = $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1458$

दस लाख से बड़ी संख्याओं की संख्या ज्ञात करें जो 2, 3, 0, 2, 3, 4, 3 अंक से बनाई जा सकती हैं -

दस लाख से बड़ी से संख्याएँ 7 अंको की होगी।

कुल अंक = 7, समान अंक 2, 2 बार व 3 अंक, 3 बार तब

$$\text{सात अंको की संख्याएं} = \frac{7!}{2!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 420$$

लेकिन 7 अंकों की वे संख्याएँ जिनमें बाईं ओर 0 है, इस लास से कम है।
 ऐसी संख्याओं की संख्या निकालने के लिए बाकी छः अंकों को सजाना हैं।

$$\text{बाकी छः अंकों की क्रमचयों की संख्या} = \frac{6!}{2!3!} = 60$$

$$\text{दस लाख से बड़ी संख्याओं की संख्या} = 420 - 60 = 360$$

विधि 2 :

0 अंक को छोड़कर अन्य अंको से जिनमें 2 अंक, 2 बार और 3 अंक, 3 बार है इनसे दस लाख से छोटी

$$\text{छः अंको की संख्या} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 60$$

सात अंकों की संख्या बनाने के लिए जो दस लाख से बड़ी होगी के लिए 0 को छः अंको में बायीं ओर छोड़कर छः जगह अंकों में रख सकते हैं, 60 संख्याओं में तब,

$$\text{दस लाख से बड़ी अभीष्ट संख्याये} = 6 \times 60 = 360$$

2, 3, 4, 5, 6, 9 अंकों से 400 और 1000 के बीच में कितनी संख्याएँ बन सकती हैं -

400 ओर 1000 के बीच की संख्याएं तीन अंकों की होगी जिसमें सैकड़ा के स्थान का अंक 4 या 5 या 6 होगा , तब सैकड़ा के स्थान पर अंक सजाने के कुल तरीके = 3

बचे दो स्थानों की पर शेष पाँच अंकों (छः अंकों में सैकड़ा के लिए 4 या 5 या 6 को छोड़कर) रखने के तरीके = $5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

$$? = 3 \times 20 = 60$$

कितने अलग - अलग क्रमों में 4 पुरुष एवं 4 महिलायें एक गोलमेज के चारों ओर बैठ सकती हैं जब,

- (क) इनके बैठने पर कोई प्रतिबंध न हो ।
 (ख) कोई दो महिलायें एकसाथ न बैठें ।

$$(क) ? = (8-1)! = 7! = 5040$$

$$(ख) 4 \text{ पुरुषों के बैठने के कुल तरीके} = 4! = 24$$

4 महिलायें 4 पुरुषों के मध्य 4 स्थानों पर बैठ सकती है, जिससे दो महिलाएं एक साथ नहीं बैठेंगी , तब गोले में

$$4 \text{ महिलाओं के बैठने के तरीके} = (4-1)! = 3! = 6$$

$$\text{अभीष्ट तरीके} = 6 \times 24 = 144$$

25 लड़के एवं 10 लड़कियों से नौविहार के लिए 8 के कितने विभिन्न दल बानए जा सकते हैं यदि प्रत्येक दल में 5 लड़के और 3 लड़कियाँ हों -

$$\begin{aligned} ? &= 25C_5 \times 10C_3 = \frac{25!}{5!(25-5)!} \times \frac{10!}{3!(10-3)!} \\ &= \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 20!} \times \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \\ &= 5 \times 23 \times 22 \times 21 \times 10 \times 3 \times 4 = 6375600 \end{aligned}$$

शब्द 'CREATE' के अक्षरों को अलग-अलग कितने प्रकार से क्रमबद्ध किया जा सकता है-

कुल अक्षर = 6 तथा अक्षर Repeat E दो बार

$$? = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

4 पुरुष और 5 महिलाओं में से एक तीन सदस्यों वाली समिति बनानी है, जिसमें कम से कम एक सदस्य महिला हो । अलग - अलग कितने प्रकार से यह किया जा सकता है -

समिति के प्रकार - 1 महिला 2 पुरुष + 2 महिला 1 पुरुष + 3 महिलाएं

$$\begin{aligned} ? &= 5C_1 \times 4C_2 + 5C_2 \times 4C_1 + 5C_3 \\ &= \frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{2!2!} + \frac{5!}{2!3!} \times \frac{4!}{3!} + \frac{5!}{3!2!} \\ &= 5 \times 6 + 10 \times 4 + 10 = 30 + 40 + 10 = 80 \end{aligned}$$

AUCTION शब्द के अक्षरों को इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि सभी स्वर हमेशा साथ में आयें । कितने विभिन्न प्रकार से उन्हें व्यवस्थित किये जा सकते हैं -

(A,I,O,U), C, T, N स्वर को एक शब्द मानकर तब, व्यवस्था = $4! = 24$

(A,I,O,U) की व्यवस्था = $4! = 24$

$$? = 24 \times 24 = 576$$

JUDGE के अक्षर कितने विभिन्न प्रकार से क्रमबद्ध किये जा सकते हैं जिससे स्वर हमेशा एक साथ रहेंगे -

(E,U), D,G,J स्वर को एक शब्द मानकर व्यवस्था = $4! = 24$

(E,U) के अक्षर की व्यवस्था = $2! = 2$

$$? = 24 \times 2 = 48$$

ADJUST शब्द के अक्षरों को कितने विभिन्न प्रकारों से व्यवस्थित किया जा सकता है, जिसमें स्वर पास-पास न आते हों -

$$\text{बिना प्रतिबन्ध कुल तरीके} = 6! = 720$$

दोनों स्वर (A, U) साथ रहने पर कुल तरीके = $2! \times 5!$ (दोनों को एक साथ)

$$? = 720 - (2! \times 5!) = 720 - 240 = 480$$

एक पंक्ति में सात कुर्सियों पर 4 पुरुष और 3 महिलाएँ इस प्रकार कितने तरीके से बैठ सकते हैं कि महिलाएँ सम स्थान पर हो -

$$\text{चार पुरुषों की व्यवस्था} = 4! \quad \text{व 3 महिलाओं की व्यवस्था} = 3!$$

$$? = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

दो लड़कियाँ और चार लड़कों को इस तरह कतार में बिठाना है कि लड़कियाँ एक साथ नहीं बैठें। ऐसे कितने अलग-अलग तरीके से बैठाया जा सकता है -

दो लड़कियों और चार लड़कों को बिना प्रतिबंध के बैठाने के कुल तरीके

$$A = 6! = 720$$

दो लड़कियाँ एक साथ करके (पाँच का गुप बनता) बैठने के तरीके

$$B = 2! \times 5! = 240$$

$$\text{लड़कियाँ एक साथ न बैठें तब अभीष्ट तरीके} = 720 - 240 = 480$$

प्रत्येक व्यवस्था में अंक 6 और 5 को अंतिम छोरों पर रखते हुए, प्रत्येक व्यवस्था में प्रत्येक अंक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए, संख्या में '256974' की अलग-अलग कितनी तरह से लगाया जा सकता है।

6 और 5 को छोरों पर रखने के तरीके $A = 2 [(6 \dots 5) \text{ या } (5 \dots 6)]$
बाकी शेष अंक 2,4,7,9 मध्य में रखने के तरीके $B = 4! = 24$

$$? = 2 \times 24 = 48$$

प्रायिकता : घटनाओं की अनिश्चितताओं को अंकगणित रूप में निरूपित करना ।

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) : किसी प्रयोग में आये प्राप्त परिणामों का मसुच्चय । प्रदर्शित – $n(S)$

जैसे – एक सामान्य पासे की फेंक में sample space $(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

घटना (Event) : कोई घटना घटित होने की प्रायिकता $P(E)$

$$\text{प्रायिकता } P(E) = \frac{n(E) \text{ E के पक्ष में तरीके}}{n(S) \text{ कुल तरीके}}$$

जैसे – यदि एक पासा फेंका जाए, तो चूँकि पासे पर 6 अंक लिखे रहते हैं तथा इनमें से कोई भी अंक ऊपर आ सकता है ।

एक बार पासा फेंके जाने पर कुल घटना $n(S) = 6$

ऊपर अंक 2 के आने की प्रायिकता

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

किसी घटना में अवयवों की संख्या ज्ञात करना :

- 1) **गिनती का योग नियम** : यदि E एक घटना है जो घटना E_1 या E_2 में से किसी एक के घटने से घटती है ।

$$n(E) = n(E_1) + n(E_2)$$

- 2) **गिनती का गुणन नियम** : यदि E एक घटना है, जो घटना E_1 एवं E_2 दोनों के एक साथ घटने से घटती है ।

$$n(E) = n(E_1) \times n(E_2)$$

- 3) **क्रमचय** : यदि कोई घटना E तभी घटित होती है जब n विभिन्न वस्तुओं में r वस्तुएँ सजाई जाती हैं , तब प्रायिकता

$$n(E) = n_{Pr} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- 4) **संचय** : यदि कोई घटना E तभी घटित होती है, जब n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुएँ चुनी जाती हैं ।

$$n(E) = n_{Cr} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

परस्पर अपवर्जी घटनाएँ : किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ E_1 तथा E_2 एक साथ नहीं घटित होती हैं तो इन घटनाओं को परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहा जाता है, जिसमें $E_1 \cap E_2 = \phi$

यदि E_1 तथा E_2 दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो घटना (E_1 या E_2) की प्रायिकता $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

यदि E_1 तथा E_2 दो परस्पर अपवर्जी नहीं घटनाएँ हैं तो घटना (E_1 या E_2) की प्रायिकता $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

स्वतंत्र घटना : यदि दो घटनाओं का घटित होना या न होना , एक -दूसरे पर निर्भर न हो । तब,

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

जैसे यदि एक सिक्के को दो बार उछाला जाए, तो पहली बार शीर्ष का आना दूसरी बार शीर्ष आने से स्वतंत्र है ।

परतंत्र घटना : यदि एक घटना का घटित होना दूसरी घटना पर निर्भर हो ।

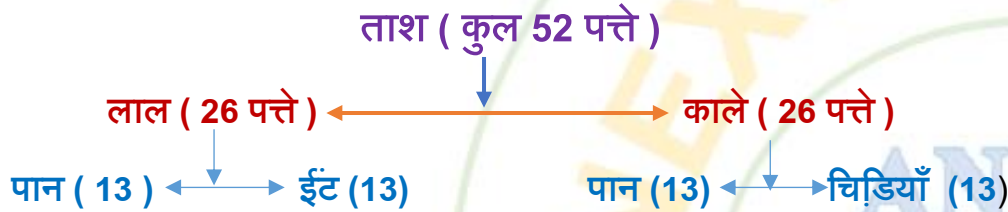
जैसे - ताश की एक गड्डी से एक पत्ता खींचा जाता है जिसे बाहर रखते हुए यदि दूसरा पत्ता खींचा जाए तो दूसरे पत्ते का निकलना पहले पर निर्भर करेगा।

महत्वपूर्ण सूत्र :

प्रायिकता(घटना घटित होना $P(A)$ + घटित न होना $(P(A')) = 1$

यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S में A, B तथा C कोई तीन घटनाएँ हो, तो

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



प्रत्येक चारों में

एक - एक इक्का

कुल इक्का = चार

एक - एक बादशाह

कुल बादशाह = चार

एक - एक बेगम

कुल बेगम = चार

एक - एक गुलाम

कुल गुलाम = चार

एक - एक 2,3,4,5,6,7,8,9,10 अंक

के पत्ते

कुल अंकों के = 36

$$\text{कुल पत्ते} = 16 + 36 = 52$$

महत्वपूर्ण सवालों के हल :

एक सिक्के के उछाल में हेड आने की प्रायिकता है -

सिक्के में हेड या टेल होता है।

$S = [H, T], E = \{T\}$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

एक साधारण पासे को फेंका जाता है, तो चार का अंक ऊपर आने की प्रायिकता बताइये -

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6} \quad \left(\begin{array}{l} 4 \text{ अंक आने की घटनाएं} \\ 6 \text{ (कुल घटनाएं)} \end{array} \right)$$

दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। दोनों पर आए अंकों का योग 6 होने की प्रायिकता है -

कुल घटनाएं $n(S) = 6 \times 6 = 36$

योग 6 आने की घटनाएं = $\{(3,3), (4,2), (5,1), (1,5), (2,4), (3,3)\}$

$n(E) = 6$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

चार सिक्कों को उछाला जाता है, तो 2 सिक्कों पर शीर्ष आने की प्रायिकता है -

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$E = \{(H,H,T,T), (H,T,H,T), (H,T,T,H), (T,H,H,T), (T,T,H,H), (T,H,T,H)\}$

$$n(E) = 6 \quad \text{or} \quad n(E) = {}^4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$$

$$P(E) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

यदि ताश के 52 पत्तों में से 2 पत्ते यादृच्छया खींचे जाएँ, तो दोनों के बादशाह होने की संभावना है -

52 पत्तों में से 2 पत्ते खींचने के कुल तरीके

$$n(S) = 52C_2 = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51$$

कुल 4 बादशाह के पत्तों में 2 बादशाह के पत्ते खींचने के तरीके

$$n(E) = 4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{26 \times 51} = \frac{1}{221}$$

ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से 2 पत्ते खींचे जाते हैं, तो उनमें एक बादशाह तथा एक गुलाम होने की संभावना है -

52 पत्तों में से 2 पत्ते खींचने के कुल तरीके

$$n(S) = 52C_2 = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51$$

फिर एक बेगम आने की घटना E_1 तथा एक बादशाह आने की घटना E_2

$$n(E) = n(E_1) \times n(E_2) = 4C_1 \times 4C_1 = 4 \times 4$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4 \times 4}{26 \times 51} = \frac{8}{663}$$

ताश के 52 पत्तों में से 4 पत्ते खींचे जाते हैं। तो इनमें एक और केवल एक गुलाम हो, इसकी क्या संभावना है -

$$P(E) = \frac{4 \text{ गुलाम पत्तों में 1 गुलाम खींचे की घटना और शेष 48 पत्तों में से 3 पत्तों खींचे कुल 52 पत्तों में से 4 खींचने की कुल घटनाये}}{4C_1 \times 48C_3} = \frac{4 \times 3 \times 47 \times 46}{26 \times 51} = \frac{4324}{221}$$

6 पुरुष और 6 महिलायें यादृच्छया एक कतार में बैठते हैं। सभी 6 लड़कियों को - (1) एक साथ बैठने की प्रायिकता निकालें।

(2) पुरुष और महिलाओं के एकान्तर रूप में बैठने की प्रायिकता निकालें।

6 पुरुष व 6 महिलाओं का क्रमचय से बैठाने के कुल तरीके

$$n(S) = 12P_{12} = 12!$$

यदि 6 महिलाओं का 1 ग्रुप मान ले तो इस प्रकार 7 लोगो का एक ग्रुप हो जाएगा, तब इन सातों को बैठाने के क्रम से बैठाने के कुल तरीके

$$n(E_1) = 7P_7$$

महिलायें भी आपस में बैठने के क्रम भी बदलेगें तब बैठने के तरीके

$$n(E_2) = 6P_6$$

$$(i) P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7! \times 6!}{12!} = \frac{1}{132}$$

$$(ii) P(E) = \frac{2 \times 6! \times 6!}{12!} = \frac{1}{462}$$

कुल 12 आम में से एक तिहाई खराब हो गए हैं। यदि बेतरतीव चार आम निकाले जायें तो एक भी आम खराब न होने की संभावना कितनी है -

सही 8 आमों में से

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8C_4}{12C_4} = \frac{\left(\frac{8!}{4!4!}\right)}{\left(\frac{12!}{4!8!}\right)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = \frac{14}{99}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5C_2 \times 2C_2}{14C_4} = \frac{10}{1001}$$

एक कलश में 4 हरी, 5 नीली, 2 लाल और 3 पीली गोलियां हैं। तब ज्ञात कीजिए –

- बेतरजीब 2 गोलियां निकालने पर, दोनों के या कम से कम एक के लाल होने की संभावना क्या है ?
- बेतरतीब 8 गोलियां निकालने पर, प्रत्येक रंग की गोलियां समान संख्या में होने की क्या संभावना है ?
- बेतरतीब 3 गोलियां निकालने पर, एक के भी हरी नहीं होने की संभावना क्या है ?
- बेतरतीब 4 गोलियां निकालने पर, दो नीली और दो लाल होने की संभावना क्या है ?

a) कुल गोलियां = 14

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2C_2 + 2C_1 \times 12C_1}{14C_2} = \frac{1 + 2 \times 12}{91} = \frac{25}{91}$$

b) E = सभी गोलियों में से 2 – 2 गोलियां लेने पर,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4C_2 \times 5C_2 \times 2C_2 \times 3C_2}{14C_8} = \frac{180}{3003} = \frac{60}{1001}$$

c) E = हरी 4 गोलियों को छोड़कर शेष 10 गोलियां में चयन करने पर,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10C_3}{14C_3} = \frac{120}{364} = \frac{30}{91}$$

d) E = 5 नीली में से 2 और 2 लाल में से 2 का चयन के तरीके

[30] समीकरण तथा असमीकरण [Equations & Inequations]

रेखा समीकरण (Linear Equations):

$aX + bY = P$ and $cX + dY = Q$ तब X या Y के गुणांकों में किसी एक के मान दोनों समीकरण में समान कर दोनों समी० को हल करने पर X व Y के मान ज्ञात हो जाते हैं। जैसे :

$3p + 2q = 16$, $5p - 4q = 1$ समी० से p तथा q के मान ज्ञात कीजिए -

$$\text{Solve : } 3p + 2q = 16 \quad 15p + 10q = 80$$

$$5p - 4q = 1 \quad \underline{15p + 12q = 3 \text{ (change Marks - \& +)}}$$

$$0 - 2q = 77 \rightarrow q = -77/2$$

Put $q = -77/2$ in Equ(i)

$$3p + 2(-77/2) = 16 \rightarrow 3p = 93 \rightarrow p = 31$$

Then $p=31 > q = -77/2$

वर्ग (Squares) :

$$x^2 = 3600 \text{ then } x = \pm 60 \text{ (Square Always gives } \pm \text{ value)}$$

$$y^2 = 2500 \text{ then } y = \pm 50$$

$60 > 50$, $60 > -50$, $-60 < 50$, $-60 < -50$, अतः $x > y$ इसलिए CND

x & y में सम्बंध - **Can't be determined**

वर्ग तथा वर्गमूल में सम्बंध (Squares and Square root case):

$$x^2 = 1600, \quad y = \sqrt{2500} \text{ then } x, y \text{ value}$$

$$x = \pm 40, \quad y = 50 \text{ then } x < y$$

Cubes Case :

$$x^3 = -1331, y^3 = 729 \text{ then } x, y \text{ value}$$

$$x = -11, \quad y = 9 \text{ then } x < y$$

$$\text{If } x^3 > y^3 \text{ then } x > y$$

$$\text{If } x^3 < y^3 \text{ then } x < y$$

द्विघात समीकरण :

Type of Equation	Roots in x equation	
	Sign of bigger root	Sign of smaller root
$ax^2 + bx + c = 0$	-	-
$ax^2 - bx + c = 0$	+	+
$ax^2 + bx - c = 0$	-	+
$ax^2 - bx - c = 0$	+	-
x roots	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
X roots	A का c से गुणा कीजिए गुणन को दो भागों में बांटे यदि +c तो दोनों भाग जोड़ने पर b यदि -c तो दोनों भाग का अंतर b हो। तब मूल $p/a, q/b$	
द्विघात समीकरण के गुण (दो मूल α, β)		
विविक्टर (D)	$b^2 - 4ac$	
$D < 0$	दोनों मूल काल्पनिक	
$D = 0$	दोनों मूल बराबर $\left(-\frac{b}{2a}\right)$	
$D > 0$	दोनों मूल भिन्न - भिन्न वास्तविक	
मूलों का योग ($\alpha + \beta$)	$-\frac{b}{a}$	

मूलों का गुणनफल ($\alpha \cdot \beta$)	$\frac{c}{a}$
जब मूल दिये तब समीकरण	$x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha \cdot \beta) = 0$
समीकरण	हल करने के लिए द्विघात में बदलना
$ax^4 + az^2 + c = 0$	put, $z^4 = x$
$\sqrt{a - x^2} = bx + c$	दोनों पक्षों का वर्ग करें
$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$	
Put, $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$ & $x^2 + \frac{1}{x^2} = y - 2$	
$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$	
Put, $\left(x - \frac{1}{x}\right) = y$ & $x^2 + \frac{1}{x^2} = y + 2$	

महत्वपूर्ण सवालों के हल :

सभी प्रश्नों में दो समीकरण दिए, जिनमें दोनों समीकरण हल करके x,y में सम्बंध बताइये -

$$4x^2 - 8x + 3 = 0, \quad 2y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \text{ then } 4 \times 3 = 12(6 + 2 = 8 \therefore +3)$$

$$x = \frac{6}{4}, \frac{2}{4} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

$$2y^2 - 7y + 6 = 0 \text{ then } 6 \cdot 2 = 12(4 + 3 = 7 \therefore +6)$$

$$y = \frac{4}{2}, \frac{3}{2} = 2, \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \leq 2, \frac{3}{2} \Rightarrow x \leq y$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ \& } 2y^2 - 13y + 21 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ then } 6 \times 1 = 6(3 - 2 = 1 \therefore -6)$$

$$x = +3, -2$$

$$2y^2 - 13y + 21 = 0 \text{ then } 21 \times 2$$

$$= 42(7 + 6 = 13 \therefore +21)$$

$$y = +\frac{7}{2}, +\frac{6}{2} = \frac{7}{2}, 3$$

$$3 < \frac{7}{2}, 3 = 3, \quad -2 < \frac{7}{2}, -2 < 3 \therefore x < y$$

$$x^2 = 4, \quad y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$x^2 = 4 \text{ then } x = \pm 2$$

$$y^2 + 6y + 9 = 0 \text{ then } 9 \times 1 = 9(3 + 3 = 6 \therefore +9)$$

$$y = -3, -3$$

$$+2 > -3, \quad -2 > -3 \therefore x > y$$

$$x^2 = 16, \quad (y + 5)^2 = 0$$

$$x^2 = 16 \text{ then } x = \pm 4$$

$$(y + 5)^2 = 0 \Rightarrow (y + 5)(y + 5) = 0 \text{ then } y = -5, -5$$

$$+4 > -5, -4 > -5 \therefore x > y$$

$$P = a^2 (a \text{ एक पूर्ण संख्या है}), P^2 - Q^2 = 0$$

$$P = a^2,$$

$$P^2 - Q^2 = 0 \Rightarrow P^2 = Q^2 \text{ then } Q = \pm P$$

$$P = P, P > -P \therefore P \geq Q$$

$$\sqrt{1225x^2} + \sqrt{4900} = 0, (3^4)^{\frac{1}{4}}y + (7^3)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\sqrt{1225x^2} + \sqrt{4900} = 0 \Rightarrow 35x + 70 = 0 \Rightarrow x = -\frac{70}{35}$$

$$= -2$$

$$(3^4)^{\frac{1}{4}}y + (7^3)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow 3y + 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{3}$$

$$-2 > -\frac{7}{3} \therefore x > y$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \cdot \beta} = +\frac{7}{12}$$

यदि समीकरण $x^2 + kx + 3 = 0$ का एक मूल 1 हो तो, k का मान

$$1^2 + k + 3 = 0 \Rightarrow k = -4$$

$\sqrt{3}x^2 + 5x + \sqrt{3} = 0$ के मूलों का योग व गुणफल ज्ञात कीजिए -

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

समीकरण $3x^2 - 12x + k = 0$ के मूल बराबर हैं, तो k का मान -

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 144 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0 \Rightarrow k = \frac{144}{12} = 12$$

$$\frac{x^2}{5} = 20 \text{ के मान है -}$$

किसी द्विघात समीकरण के मूल $-3, 2$ हैं, तो समीकरण होगा -

$$x^2 - (-3 + 2)x + (-3 \cdot 2) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\frac{x^2}{5} = 20 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$$

$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$ के दो मूल बताइये -

Put, $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$ then

$$4(y^2 - 2) - 8y + 3 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 8y - 5 = 0$$

$$4 \times 5 = 20(10 - 2 = 8(-5)) \text{ then}$$

$$y = +\frac{10}{4}, -\frac{2}{4} = \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \text{ put}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ Then } x = 2, \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + x + 2 = 0 \text{ Then } x = \text{काल्पनिक मूल}$$

$x^2 - 7x + 12 = 0$ के मूलों के व्युत्क्रमों का योगफल ज्ञात कीजिए :

[31] केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप [Measures of Central Tendency]

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (औसत)

समान्तर माध्य	हरात्मक माध्य	माध्य गुणोत्तर माध्य	माध्यिका	बहुलक
श्रेणी		माप	सूत्र	
आकड़ें $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_n$		समान्तर माध्य	$\frac{\text{(पदों का योग)}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$	
आकड़ें $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_n$		माध्यिका	सबसे पहले आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए तब यदि	
		पदों की संख्या n विषम	$\frac{n + 1}{2}$ वाँ पद	
		n सम	$\frac{1}{2} \left[\frac{n}{2} \text{ वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{ वें पद का मान} \right]$	
आकड़ें $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_n$		बहुलक	जिन समान मान वाले पदों की संख्या अधिक होगी	
सारणी में चर $x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$ की क्रमश बारम्बारता $f_1, f_2, f_3 \dots \dots \dots f_n$		समान्तर माध्य (सारणी $f(x)$ बनाओ)	$\frac{\sum f(x)}{\sum f} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 \dots \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 \dots \dots + f_n}$	
सारणी में चर $x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$ की क्रमश बारम्बारता $f_1, f_2, f_3 \dots \dots \dots f_n$		माध्यिका	बारम्बारता सारणी का योग N करें तब यदि N (Even) तो $N/2$ वाँ मान व N (Odd) तो $(n+1)/2$ वाँ मान (संचयी बारम्बारता में जिस चर का हो)	
यदि L_1 = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा , L_2 = माध्यिका वर्ग की उच्च सीमा f = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता , n = बारम्बारताओं का योग F = माध्यिका वर्ग के पहले वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता			$Me = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f} \left(\frac{n}{2} - F \right)$	
सारणी में चर $x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$ की क्रमश बारम्बारता $f_1, f_2, f_3 \dots \dots \dots f_n$		बहुलक	जिस चर की बारम्बारता का मान अधिक होगा वही चर बहुलक	

5, 10, 15, P, 20, 35, 40 का समान्तर माध्य 21 हो तो P का मान है -

$$21 = \frac{125 + P}{7} \Rightarrow 147 = 125 + P \Rightarrow P = 22$$

निम्न आँकड़ों का समान्तर माध्य व माधिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए -

चर	05	06	08	09	11	12
बारम्बारता	03	08	12	09	06	02

हल : समान्तर माध्य के लिए सारणी :

चर	बारम्बारता	f(x)
5	3	15
6	8	48
8	12	96
9	9	81
11	6	66
12	2	24
योग	40	320

$$\bar{x} = \frac{\sum f(x)}{\sum f} = \frac{320}{40} = 8$$

माधिका के लिए सारणी :

चर	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
5	3	3
6	8	3 + 8 = 11
8	12	11 + 12 = 23
9	9	23 + 9 = 32
11	6	32 + 6 = 38
12	2	38 + 2 = 40
योग	40	N=40 (Even)

$$Me = \frac{N}{2} \text{ वें पद का मान}$$

$$= \frac{40}{2} = 20 \text{ वें पद का मान}$$

(संचयी बारम्बारता में 20 मान 23 संचयी बारम्बारता में हैं, अतः इस बारम्बारता से चर में मान माधिका हैं)

माधिका = 8

चर 08 की बारम्बारता 12 सबसे अधिक है, अतः बहुलक = 08

निम्न आँकड़ों का समान्तर माध्य व माधिका ज्ञात कीजिए :

वर्ग - अन्तराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारम्बारता	9	12	15	10	14

हल : समान्तर माध्य के लिए सारणी -

वर्ग-अन्तराल	मध्य बिन्द (x)	बारम्बारता (f)	f(x)
0-10	5	9	45
10 - 20	15	12	180
20 - 30	25	15	375
30 - 40	35	10	350
40 - 50	45	14	630
योग		$\sum f = 60$	$\sum f(x) = 1580$

$$\bar{x} = \frac{\sum f(x)}{\sum f} = \frac{1580}{60} = 26.33$$

माधिका के लिए सारणी :

वर्ग - अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	9	9
10 - 20	12	21 (F)
20 - 30 (L ₁ - L ₂)	15 (f)	36
30 - 40	10	46
40 - 50	14	60
योग	N = 60	

N = 60 Then N/2 = 30 (संचयी बारम्बारता 36 में तो माधिका वर्ग 20 - 30)

$$Me = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f} \left(\frac{n}{2} - F \right) = 20 + \frac{10}{15} (30 - 21)$$

$$= 20 + \frac{2}{3} (9) = 20 + 6 = 26$$

एक वितरण का माध्य 20 है और मानक विचलन 4 है, तो इसका विचरण गुणांक का मान क्या होगा -

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100\%$$

$$? = \frac{4}{20} \times 100\% = 20\%$$

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ आंकड़ों की माध्यिका हैं -

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, 2 (In Ascending order)

$n = 9$ then

$$Me = \frac{n+1}{2} \text{वां पद} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ वां पद} = \frac{1}{2}$$

10, 21, 5, 1, 3, 17, 19, 2 की रेंज ज्ञात कीजिए :

$$\text{Range} = \text{Max.} - \text{min} = 21 - 1 = 20$$

यदि नंबर 3, 56, 7, 11, a, 15, 19, 20, 25, 28 आरोही क्रम में हैं और उनकी माध्यिका 13 है, तो a ज्ञात करें -

$n = 10$ (Even) then

$$Me = \frac{1}{2} \left[\frac{n}{2} \text{वां पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वां पद} \right] = \frac{5 \text{वां पद} + 6 \text{वां पद}}{2}$$

$$Me = \frac{a+15}{2} \Rightarrow 13 = \frac{a+15}{2} \Rightarrow 26 = a+15$$

$$\Rightarrow a = 26 - 15 = 11$$

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध होता है -

यदि दो राशि a व b है तो

$$\text{समांतर माध्य (AM)} = \frac{a+b}{2}, \text{ हरात्मक माध्य (HM)} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{गुणोत्तर माध्य (GM)} = \sqrt{ab}$$

$$\therefore (AM) \times (HM) = ab$$

$$AM \times HM = GM^2$$

$2x^2 - 10$, $30 - x^2$, $-x^2 + 6x + 10$ का समांतर माध्य होगा -

$$? = \frac{2x^2 - 10 + 30 - x^2 - x^2 + 6x + 10}{3}$$

$$? = \frac{6x + 30}{3} = 2x + 10$$

एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 11 एक दिवसीय मैचों में निम्नलिखित रन बनाए, किसी बारंबारता सर्वाधिक है -

65, 30, 7, 60, 65, 65, 30, 28, 30, 15, 30

30 सबसे अधिक चार बार है, अतः 30 की बारम्बारता सर्वाधिक है।

वर्ष (Year)

साधारण वर्ष (365 दिन) ← → लीप वर्ष (366 दिन)

जैसे – 1999, 2019

जैसे – 2020, 1996(4 से विभाज्य वर्ष)

स्मरणीय तथ्य :

- शताब्दी वर्ष – 100 के गुणन में वर्ष जैसे – 300, 2000
- किसी भी दिन में 7 दिन या 14 दिन या 7 के गुणन में दिन जोड़ने या घटाने से वही दिन प्राप्त होता है , जैसे – आज सोमवार हैं, तो आज से 15 वां दिन या 14 दिन बाद वाला दिन सोमवार होगा ।
- विषम दिन – हमें पता है कि दिनों की रीपीटीशन 7 दिनों बाद होती है, क्योंकि सप्ताह में 7 दिन होते हैं। यदि हम दिनों की संख्या में 7 का भाग दे, तो बचा शेष विषम दिन होते हैं। जैसे – 1 जनवरी 2017 को मंगलवार है, तो 31 दिसम्बर 2017 को भी मंगलवार होगा क्योंकि 1 जनवरी के बाद कुल दिन 364, तब विषम दिन = $364/7 = 0$ अतः वही दिन होगा ।

कुल दिन		विषम दिन
365	$365 / 7$	1
366	$366 / 7$	2
100 वर्ष	$76 \text{ साधारण वर्ष} + 24 \text{ लीप वर्ष} = (76 + 48)/7$	5
200 वर्ष	100 वर्ष में 5 तो 200 में $10/7$	3
300 वर्ष	100 वर्ष में 5 तो 300 में $15/7$	1
400 वर्ष	100 वर्ष में 5 तो 400 में $21/7$ (क्योंकि 400 शताब्दी लीप वर्ष)	0
500 वर्ष	400 वर्ष तक 0 तथा 100 वर्ष में 5	5
600 वर्ष	400 वर्ष तक 0 तथा 200 वर्ष में 3	3

- साधारण वर्ष का प्रारम्भिक दिन व अंतिम दिन समान होता है ।
- लीप वर्ष का प्रारम्भिक दिन से अंतिम दिन एक दिन बाद का होता है ।
क्योंकि लीप वर्ष में पहला दिन छोड़कर विषम दिन +1 होता है जैसे – 1 जनवरी 2008 को बुधवार था तो 31 दिसम्बर 2008 को गुरुवार होगा ।

दिये कैलेण्डर के समान दिन वाला कैलेण्डर ज्ञात करना :

वर्ष	प्रक्रिया	समान कैलेण्डर
लीप वर्ष	+ 28	लीप वर्ष (समान दिन)
साधारण वर्ष	+ 11	साधारण वर्ष (यदि 11 जोड़ने पर लीप वर्ष आये तो 6 जोड़े)

जैसे – 2020 का कैलेण्डर आगे कब प्रयोग में समान होगा –

2020 (लीप) → + 28 → 2048 में

किसी तिथि का दिन निकालना :

विधि 1 : विषम दिन विधि :

हमें पता है कि जब कैलेण्डर बनाया गया यानि 1 जनवरी 1 ई० को सोमवार था, तब दिनों के कोड

दिन	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि	रवि
कोड	0	1	2	3	4	5	6

जैसे – 2 अप्रैल 2020 को कौन –सा दिन था –

हल : $\text{विषम दिन} = 0 \text{ (2000 वर्ष में)} + 19 \text{ (19 वर्ष में)} + 4 \text{ (19 वर्ष में लीप)} + 3 \text{ (जनवरी)} + 1 \text{ (फरवरी)} + 3 \text{ (मार्च)} + 2 \text{ (अप्रैल)} = 32/7 = 4 \text{ विषम दिन}$
4 विषम दिन कोड में गुरुवार का है, अतः 2 अप्रैल 2020 का **गुरुवार** था ।

विधि 2 : संक्षिप्त कोड विधि :

काका

$$\text{दिन कोड} = \frac{\text{तारीख} + \text{महीना कोड} + \text{शताब्दी कोड} + \text{वर्ष के अंतिम दो अंक} + \frac{\text{दो अंक}}{4}}{7}$$

इस सूत्र में दिन कोड निकालने के लिए निम्न कोड का प्रयोग करें -

दिन	सोम	मंगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि	रवि
कोड	2	3	4	5	6	0	1

साधारण वर्ष के महीनों का कोड निम्न हैं, लेकिन लीप वर्ष में जनवरी का 0 तथा फरवरी का 3 हो जाता है।

महीना	कोड	शताब्दी वर्ष	कोड
जनवरी	1	1200	6
फरवरी	4	1300	4
मार्च	4	1400	2
अप्रैल	0	1500	0
मई	2	1600	6
जून	5	1700	4
जुलाई	0	1800	2
अगस्त	3	1900	0
सितम्बर	6	2000	6
अक्टूबर	1	2100	4
नवम्बर	4	2200	2
दिसम्बर	6	2300	0

उदाहरण : 2 अप्रैल 2020 को कौन - सा दिन था -

हल :

$$\text{दिन कोड} = \frac{\text{तारीख} + \text{महीना कोड} + \text{शताब्दी कोड} + \text{वर्ष के अंतिम दो अंक} + \frac{\text{दो अंक}}{4}}{7}$$

$$\text{Day code} = \frac{2 + 0 + 6 + 20 + \frac{20}{4}}{7} = \frac{8 + 20 + 5}{7} = 5(\text{code})$$

5 कोड सारणी 2nd में गुरुवार है। अतः 2 अप्रैल 2020 को गुरुवार होगा।

15 अगस्त 1947 को कौन-सा दिन था -

$$\text{दिन कोड} = \frac{\text{तारीख} + \text{महीना कोड} + \text{शताब्दी कोड} + \text{वर्ष के अंतिम दो अंक} + \frac{\text{दो अंक}}{4}}{7}$$

$$\text{day code} = \frac{15 + 3 + 0 + 47 + \frac{11}{4}}{7} = \frac{1 + 5}{7} = 6(\text{Friday})$$

यदि किसी महीने की 2 तारीख रविवार को पड़ती है, तो उसी महीने की 31 तारीख को कौन - सा दिन था -

$$2 \text{ तारीख के बाद } 31 \text{ तक दिन } (31 - 2) = 29$$

$$\text{विषम दिन} = 29/7 = +1 \text{ (रविवार + 1 = सोमवार)}$$

अतः अभीष्ट दिन **सोमवार**

महत्वपूर्ण सूत्र -

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a + b)^2 - 4ab$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + bc + cd + ad + bd) + ac$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Imp. Trick :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{If } x + \frac{1}{x} = a, \text{ then } x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$$

$$\text{If } x + \frac{1}{x} = a, \text{ then } x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$$

$$\text{If } x + \frac{1}{x} = a, \text{ then } x^6 + \frac{1}{x^6} = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2$$

$$\text{If } x - \frac{1}{x} = a, \text{ then } x^2 - \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$$

$$\text{If } x - \frac{1}{x} = a, \text{ then } x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$$

$$\text{If } x - \frac{1}{x} = a \text{ then, } x^4 - \frac{1}{x^4} = a^4 + 4a^2 + 2$$

$$\text{If } x - \frac{1}{x} = a \text{ then, } x^5 - \frac{1}{x^5} = a^5 + 5a^3 + 5a$$

$$\text{If } x + \frac{1}{x} = a \text{ then, } x^6 - \frac{1}{x^6} = a^6 + 6a^4 + 9a^2 + 2$$

द्विघात समी० का न्यूनतम मान : सबसे पहले समीकरण का अवकलन ज्ञात करके x का मान ज्ञात कर समीकरण में रखने से उसका न्यूनतम मान ज्ञात हो जाता है।

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

द्विघात समी० का अधिकतम मान : $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{Max.} = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$a, b, c, d \text{ Max value} = \frac{1}{4}$$

$$? = \text{Max} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

यदि $x > 1$ और $x^2 + \frac{1}{x^2} = 83$ हो, तो $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान होगा :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 83 - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 81 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 9$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 729 + 3 \times 9 = 756$$

यदि $x + y = 12$ हो, तो $x \cdot y$ का अधिकतम मान क्या है -

$$\text{If } x + y + \dots + n = a, \text{ Then, } \text{Max}_{x,y,\dots,n} = \frac{a}{n}$$

$$\text{Max.} = x \cdot y = \frac{12}{2} \times \frac{12}{2} = 6 \text{ times } 6 = 36$$

यदि $x + y = 8$ हो, तो $x \cdot y$ का अधिकतम मान है -

$$\text{Max.} = x \cdot y = \frac{8}{2} \times \frac{8}{2} = 16$$

$(-4x^2 + 12x - 2)$ का अधिकतम मान है -

$$\text{Max} = c - \frac{b^2}{4a} = -2 - \frac{(12^2)}{4(-4)} = -2 + 9 = 7$$

यदि $a + b + c + d = 1$ हो, तो $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ का अधिकतम मान क्या होगा -

यदि $x + \frac{1}{x} = 99$ हो तो $\frac{100x}{2x^2 + 102x + 2}$ का मान होगा -

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 99 &\Rightarrow x^2 + 1 = 99x \\ \frac{100x}{2x^2 + 102x + 2} &= \frac{100x}{2(x^2 + 1) + 102x} \\ &= \frac{100x}{2(99x) + 102x} = \frac{100x}{300x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

तालिका :

तालिका कुछ डाटा दिया जाता है, जिसे ध्यान से पढ़कर उसके प्रश्नों का उत्तर ज्ञात किया जाते हैं।

कुल तालिका के उदाहरण :

निम्न सारणी में एक राज्य में 1999-2004 से 2003-2004 तक अवधि में खाद्यान्नों की पैदावार को (दस लाख टनों में) दर्शाया गया है। इस सारणी का अध्ययन करके प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

पैदावार (दस लाख टनों में)				
वर्ष	गेहूँ	चावल	जौ	अन्य अनाज
1999-2000	680	270	250	450
2000-2001	800	420	440	300
2001-2002	680	350	320	460
2002-2003	720	400	380	500
2003-2004	820	560	410	690

- 2002-2003 में जौ की पैदावार में पिछले वर्ष की तुलना में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?
- 1999-2000 से 2003-2004 तक की अवधि में कुल पैदावार का a% गेहूँ की पैदावार है। तदनुसार, a का मान लगभग कितना है ?
- 2002-2004 में किस अनाज की पैदावार पिछले वर्ष की तुलना में सबसे ज्यादा है ?
- इन वर्षों में चावल की औसत पैदावार तथा जौ की औसत पैदावार का अंतर कितना है ?

$$? \% = \frac{380 - 320}{380} \times 100\% = \frac{60}{380} \times 100\% = 18.75\%$$

गेहूँ की कुल पैदावार = 3700,

कुल पैदावार = 3700+2000+1800+2400= 9900

$$a\% = \frac{3700}{9900} \times 100\% = 37.37\%$$

$$\text{चावल वृद्धि \%} = \frac{160}{400} \times 100 = 40\%$$

$$\text{अन्य अनाज वृद्धि \%} = \frac{190}{500} \times 100\% = 38\%$$

अतः चावल में अधिक वृद्धि हुई।

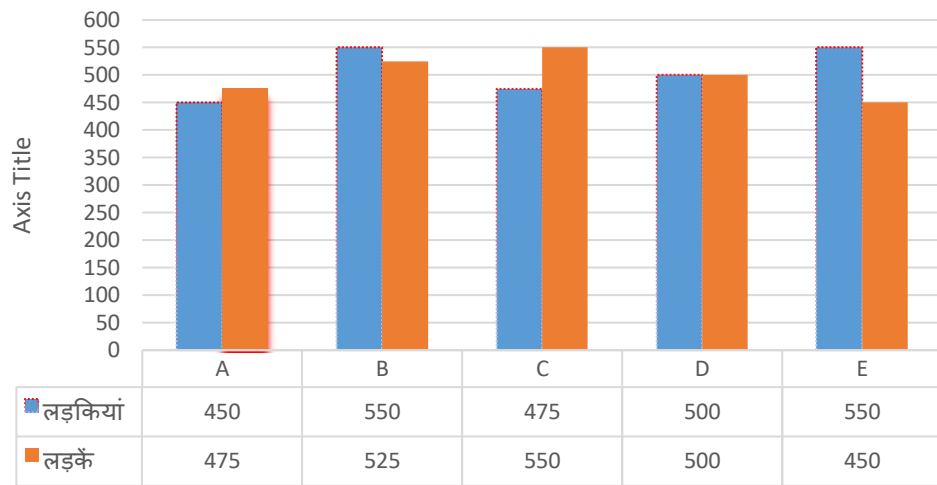
$$? = \frac{2000}{5} - \frac{1800}{5} = 400 - 360 = 40 \text{ मिलियन टन}$$

ग्राफ :

दण्डारेख, बार, रेखाचित्र में ग्राफ द्वारा डाटा को कम अथवा अधिक दिखाया जाता है, जिनको ध्यान से पढ़कर सवालों को हल किया जाता है।

उदाहरण :

पाँच स्कूल से एक रैली में भाग लेनेवाले लड़के व लड़कियाँ



- (क) स्कूल A और C से मिलकर रैली में भाग लेनेवाले लड़कियों की कुल संख्या कितनी हैं ?
- (ख) स्कूल B से रैली में भाग लेने वाले लड़कों को संख्या उस स्कूल से रैली में भाग लेने वाले बच्चों की कुल संख्या का कितना प्रतिशत हैं ?
- (ग) स्कूल E से रैली में भाग लेने वाली लड़कियों की संख्या उसी स्कूल से रैली में भाग लेने वाले लड़कों की संख्या का लगभग कितना प्रतिशत हैं ?
- (घ) स्कूल D और E से मिलकर रैली में भाग लेने वाली लड़कियों की कुल संख्या का स्कूल A और B से मिलकर रैली में भाग लेने वाले लड़कों की कुल संख्या से क्रमशः अनुपात क्या हैं ?
- (ङ) सभी स्कूलों से मिलकर रैली में भाग लेने वाली लड़कियों की औसत संख्या क्या हैं ?

(क) $? = 450 + 475 = 925$

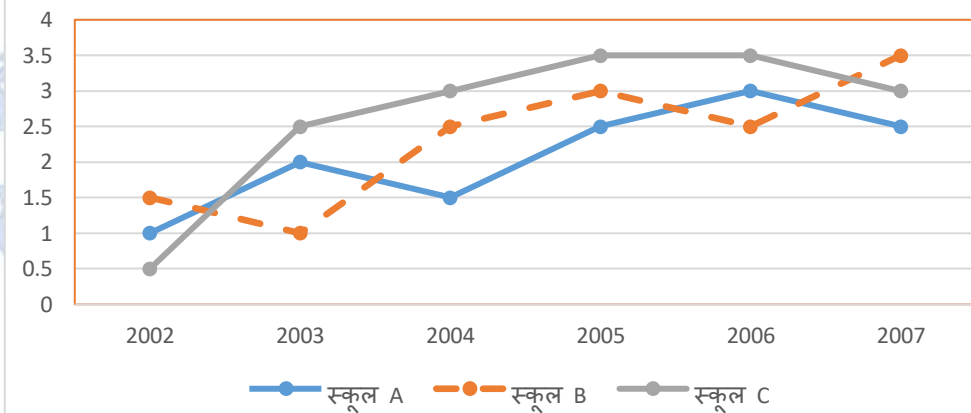
(ख) $? \% = \frac{525}{1075} \times 100\% = \frac{23}{43} \times 100\% = 48.83\%$

(ग) $? \% = \frac{550}{450} \times 100\% = \frac{1100}{9} \% = 122.22\%$

(घ) $? = 1050 : 1000 = 21 : 20$

(ङ) $? = \frac{450 + 550 + 475 + 500 + 550}{5}$
 $= 500 + \frac{-50 + 50 - 25 + 0 + 50}{5} = 505$

विगत वर्षों में तीनों स्कूलों में विद्यार्थियों की संख्या (हजारों में)



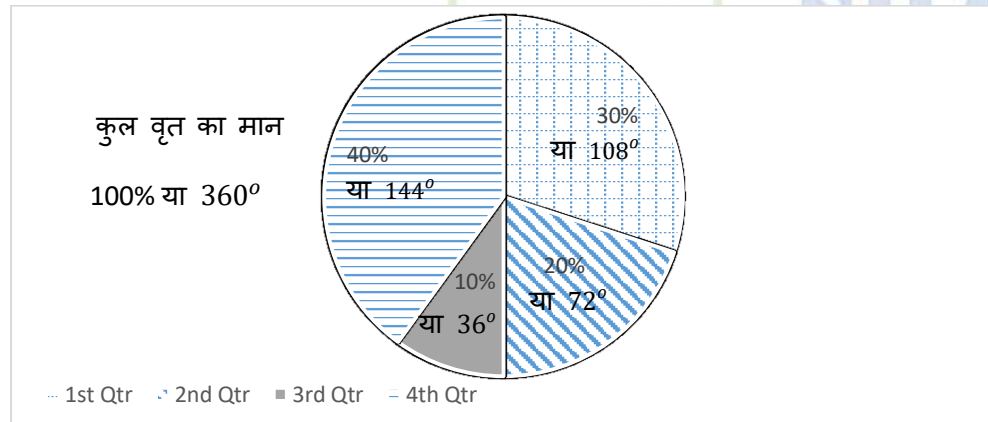
- (क) वर्ष 2006 में सभी स्कूलों में मिलकर विद्यार्थियों की औसत संख्या क्या थी ?
- (ख) वर्ष 2004 में स्कूल B और C में मिलकर विद्यार्थियों की कुल संख्या वर्ष 2007 में स्कूल B और स्कूल C में मिलकर विद्यार्थियों की कुल संख्या का लगभग कितना प्रतिशत थी ?
- (ग) दिए गए वर्षों में तीन स्कूल A, B, C में मिलकर विद्यार्थियों की कुल संख्या कितनी बार समान थी ?

(घ) सभी वर्षों में मिलकर स्कूल A में विद्यार्थियों की लगभग औसत संख्या क्या थी ?

(ङ) वर्ष 2003 में सभी स्कूलों में मिलकर विद्यार्थियों की कुल संख्या और वर्ष 2005 में स्कूल B में विद्यार्थियों की संख्या के बीच क्या अंतर है ?

(क)	$? = \frac{2.5 + 3 + 3.5}{5} = 3$ हजार
(ख)	$? \% = \frac{3 + 2.5}{3 + 3.5} \times 100\% = \frac{5.5}{6.5} \times 100\% = 85\%$
(ग)	वर्ष 2005, 2006 एवं 2007 में विद्यार्थियों की कुल संख्या समान थी।
(घ)	$? = \frac{1 + 2 + 1.5 + 2.5 + 3 + 2.5}{6} = 2.09$ हजार $= 2090$
(ङ)	$? = 2.5 + 3 + 3.5 - 1 - 2 - 2.5 = 3.5$ हजार $= 3500$

पाई ग्राफ –

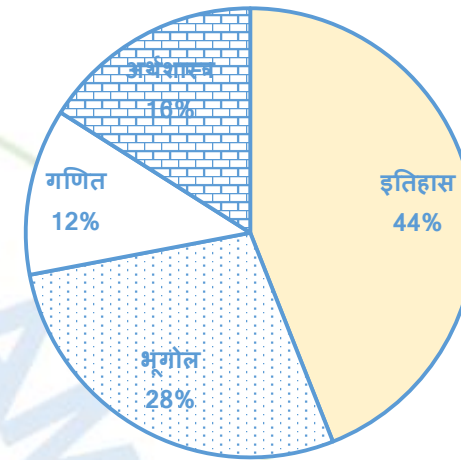


पाई ग्राफ (वृत्त ग्राफ) में कोई डाटा प्रतिशत रूप या अंश रूप में दिया जाता है।

अंश रूप को प्रतिशत रूप में बदलने के लिए –

$$x\% = \frac{a^\circ}{360^\circ} \times 100\%$$

प्रत्येक विषय के लिए प्राथमिकता अनुसार विद्यार्थियों का विवरण



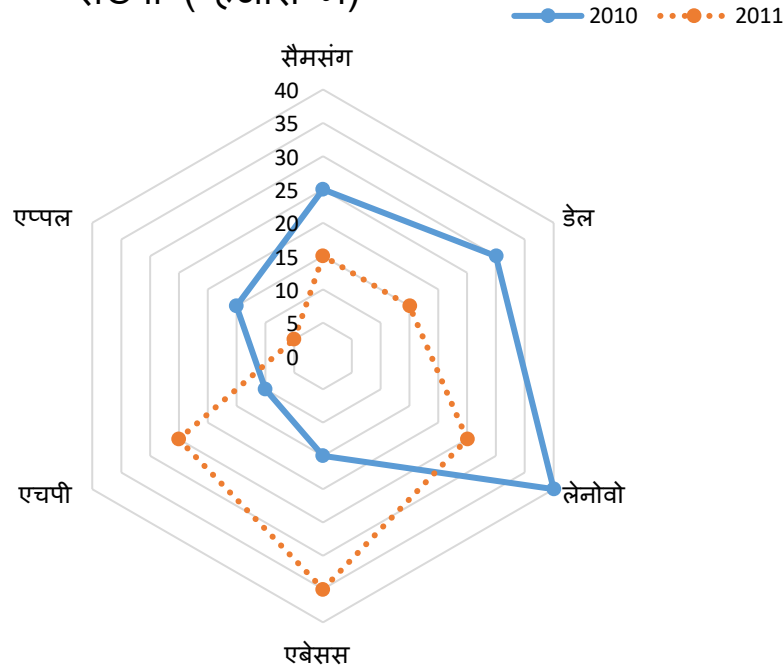
550 विद्यार्थियों में से कितने विद्यार्थियों ने गणित या अर्थशास्त्र पसंद नहीं किया?

100% = 550 then 1% = 5.5 ,
भूगोल और इतिहास पसंद करने वाले कुल (28%+44%=72%) लोगों ने गणित या अर्थशास्त्र पसंद नहीं किया तब ,
72% = 72 × 5.5 = 396

600 विद्यार्थियों में से कितने विद्यार्थियों ने गणित पसंद किया ?

100% = 600 then 1% = 6
गणित पसंद करने वाले 12% = 12 × 6 = 72

6 विभिन्न कंपनियों द्वारा निर्मित लैपटॉपों की संख्या (हजारों में)



(घ) वर्ष 2010 में एप्पल, लेनोवा एवं सैमसंग द्वारा निर्मित लैपटॉपों की संख्या एवं वर्ष 2011 में डेल, एचपी एवं एबेसस द्वारा निर्मित लैपटॉपों की संख्या के मध्य अंतर है।

(ङ) वर्ष 2011 में किस कंपनी ने सर्वाधिक लैपटॉपों का निर्माण किया ?

(क)	$? = 40 : 35 = 8 : 7$
(ख)	$? = \frac{15 + 25 + 30 + 40 + 15 + 10}{6} = \frac{135}{6} = 22.5$ हजार
(ग)	$+? \% = \frac{25 - 10}{10} \times 100\% = 150\%$
(घ)	2010 App, Len, sam. laptop = 15 + 40 + 25 = 80 2011 Del, HP, Absus laptop = 15 + 25 + 35 = 75 $? = 80 - 75 = 5$ हजार = 5000
(ङ)	Absus = 35 हजार = 35000

(क) वर्ष 2010 में लेनोवो एवं वर्ष 2011 में एबेसस के द्वारा निर्मित लैपटॉपों की संख्या का क्रमशः अनुपात है -

(ख) वर्ष 2010 में सभी कंपनियों द्वारा निर्मित लैपटॉपों की औसत संख्या (हजार में) क्या है ?

(ग) वर्ष 2010 की तुलना में वर्ष 2011 H.P. द्वारा निर्मित लैपटॉपों की संख्या में प्रतिशत वृद्धि क्या है ?